BTS CRSA2. Correction du devoir n° 2

Exercice 1 (1 point)

1. Résoudre l'équation différentielle homogène suivante : $2y' + 5y = 0$.
   $y' + \frac{5}{2}y = 0$
   On pose $a(x) = \frac{5}{2}$, et $A(x) = \frac{5}{2}x$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } f \text{ définies par } f(x) = k\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$

2. En déduire la solution telle que $f(0) = -1$.
   $f(0) = -1$ ssi $k \times \mathrm{e}^0 = -1$ ssi $k = -1$

   $\boxed{\text{La solution vérifiant } f(0) = -1 \text{ est } f(x) = -\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x}.}$

Exercice 2 (4 points)

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) :

$$3y' - y = 6\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Résoudre l'équation homogène (H) : $3y' - y = 0$.
   $y' - \frac{1}{3}y = 0$.

   $\boxed{\text{Les solutions sont les fonctions } f \text{ définies par } f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.}$

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $g(x) = c \times \mathrm{e}^{2x}$, c étant une constante à déterminer.
   On pose $g(x) = c\mathrm{e}^{2x}$.
   Alors $g'(x) = 2c\mathrm{e}^{2x}$.
   Et g est solution de (E) ssi $3g'(x) - g(x) = 6\mathrm{e}^{2x}$
   $3(2c\mathrm{e}^{2x}) - c\mathrm{e}^{2x} = 6\mathrm{e}^{2x}$
   $5c\mathrm{e}2x = 6\mathrm{e}^{2x}$
   D'où $5c = 6$ ssi $c = \frac{6}{5}$.

   $\boxed{\text{La fonction définie par } g(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{2x} \text{ est solution de } (E).}$

3. Pour la suite, on admettra que la fonction g définie par $g(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{2x}$ est solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E).

   $\boxed{\text{Le solutions de } (E) \text{ sont les fonctions définies par } f(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{2x} + k\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}, \text{ où } k \in \mathbb{R}}$

4. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 3$.
   $f(0) = 3$ ssi $\frac{6}{5}\mathrm{e}^0 + k\mathrm{e}^0 = 3$ ssi $k = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$.

   $\boxed{\text{La solution vérifiant } f(0) = 3 \text{ est la fonction } f \text{ définie par } f(x) = \frac{6}{5}\mathrm{e}^{2x} + \frac{9}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}.}$

Exercice 3 (2 points)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -9 & -11 & 2 \\ 22 & 13 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Compléter en précisant les coefficients de la matrice A.
   $a_{1,2} = -11$
   $a_{2,3} = -3$
2. Calculer les matrices $A + B$, puis $3A$, et $3A - B$. On pourra donner le résultat sans justifier.
   $A + B = \begin{pmatrix} -8 & -11 & 0 \\ 24 & 18 & 6 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} -27 & -33 & 6 \\ 66 & 39 & -9 \end{pmatrix}$,
   et $3A - B = \begin{pmatrix} -28 & -33 & 8 \\ 64 & 34 & -18 \end{pmatrix}$

Exercice 4 (2 points)

On pose les matrices $A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA.
   Pour chaque produit, on posera les calculs justifiant la dernière colonne.
   $$A \times B = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$
   Justification de la dernière colonne :
   $c_{1,3} = -10 \times 0 + 2 \times 1 + 0 \times 4 = 2.$
   $c_{2,3} = 1 \times 0 + (-3) \times 1 + 1 \times 4 = 1.$
   $c_{3,3} = 0 \times 0 + 2 \times 1 + (-2) \times 4 = -6.$
   $$B \times A = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \\ -17 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$
   Justification de la dernière colonne :
   $c_{1,3} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times (-2) = 0.$
   $c_{2,3} = 0 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times (-2) = 1.$
   $c_{3,3} = 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4 \times (-2) = -5.$

2. Calculer B^2, puis B^3.
   Pour chaque produit, on posera les calculs justifiant la dernière colonne.
   $$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 7 \\ 10 & 21 & 19 \end{pmatrix}$$
   Justification de la dernière colonne :
   $c_{1,3} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 4 = 0.$
   $c_{2,3} = 0 \times 0 + 3 \times 1 + 1 \times 4 = 7.$
   $c_{3,3} = 2 \times 0 + 3 \times 1 + 4 \times 4 = 19.$
   $$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & 57 & 40 \\ 48 & 120 & 97 \end{pmatrix}$$
   Justification de la dernière colonne :
   $c_{1,3} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 4 = 0.$
   $c_{2,3} = 2 \times 0 + 12 \times 1 + 7 \times 4 = 40.$
   $c_{3,3} = 10 \times 0 + 21 \times 1 + 19 \times 4 = 97.$

Exercice 5 (1 point)
Soit A la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 2}$ où $a_{i,j} = 3i - j^2$.
Écrire explicitement la matrice A.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$