Correction du devoir n° 7

Exercice 1 (4,5 points)

Calculer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.
   $\boxed{f'(x) = 4x^3 - 6x^2.}$
2. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$.
   $\boxed{f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2-1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}.}$
3. f est définie sur $]4;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{8-2x}$.
   $\boxed{f'(x) = 5 \times \dfrac{-(-2)}{(8-2x)^2} = \dfrac{10}{(8-2x)^2}.}$
4. f est définie sur $]5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-5}$.
   $\boxed{f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-5)-(x^2-3x)\times 1}{(x-5)^2} = \dfrac{x^2-10x+15}{(x-5)^2}.}$

Exercice 2 (3 points)

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction racine carrée définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit (d) la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x - 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\mathscr{C}$ parallèle à la droite (d).
   La tangente est parallèle à (d) ssi elle a le même coefficient directeur.
   Soit $x > 0$.
   On résout l'équation $f'(x) = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4}$, d'où $\sqrt{x} = 2$, et $x = 4$.
   $\boxed{\text{Il y a une seule tangente à } \mathscr{C} \text{ qui soit parallèle à } (d)\text{, c'est la tangente au point d'abscisse 4.}}$
2. Déterminer une équation de cette tangente.
   $y = f'(4)(x-4) + f(4) = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2 = \dfrac{1}{4}x + 1.$
   $\boxed{\text{La tangente parallèle à } (d) \text{ est la droite d'équation } y = \dfrac{1}{4}x + 1.}$

Exercice 3 (4,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[\,\cup\,]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   $f'(a)$ est le coeficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
   Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
   Donc $f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$.
   $\boxed{\text{Le coefficient directeur demandé est } f'(1) = -1.}$
2. Montrer que pour tout réel $a \neq 0$, la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation réduite $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$.
   Soit $a \neq 0$.
   $$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= \frac{-1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} \\ &= \frac{-1}{a^2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \\ &= -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} \end{aligned}$$
   $\boxed{T_a \text{ a pour équation réduite } y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}.}$
3. En déduire le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ qui passent par le point $K(-1;2)$ (On ne demande pas de déterminer une équation de ces tangentes).
   Soit $a \neq 0$.
   $K(-1;2) \in T_a$ ssi $2 = -\dfrac{1}{a^2} \times (-1) + \dfrac{2}{a}$.
   ssi $2 = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{a}$

ssi $2 = \dfrac{1+2a}{a^2}$
ssi $2a^2 - 2a - 1 = 0$.
C'est un équation du second degré d'inconnue a.
$\Delta = "b^2 - 4ac" = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12 > 0$.
Cette équation admet donc deux solutions distinctes.

$\boxed{\text{Il existe donc deux tangentes à } \mathscr{C}_f \text{ qui passent par le point } K(-1;2).}$

Exercice 4 (8 points)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite T_1 est tangente à la courbe en B, et la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A.

A : Lectures graphiques

1. Lire graphiquement $f(-2)$ et $f(0)$. Aucune justification n'est demandée.
   $\boxed{f(-2) = -7 \text{ et } f(0) = -4.}$
2. Déterminer graphiquement $f'(-2)$ et $f'(0)$. Justifier.
   $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2, c'est donc le coefficient directeur de T_1. $\boxed{\text{Donc } f'(-2) = 3,5.}$
   $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A. Cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses. $\boxed{f'(0) = 0.}$

B : Calculs de dérivées et applications

On admet désormais que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 4$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{8} \times 3x^2 - \dfrac{1}{2} \times 2x - 0 = \dfrac{3}{8}x^2 - x.}$
2. Vérifier que $f'(4) = 2$ et tracer la tangente associée sur le graphique. On fera apparaître les traits de construction.
   $\boxed{f'(4) = \dfrac{3}{8} \times 4^2 - 4 = 3 \times 2 - 4 = 2.}$
   On trace la tangente à la courbe au point d'abscisse 4.
   Comme $f'(4) = 2$, son coefficient directeur est 2.
3. (a) Montrer que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 est la droite (d) d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x - 4$.
   $f'(2) = \dfrac{3}{8} \times 2^2 - 2 = \dfrac{3}{2} - 2 = -\dfrac{1}{2}$.
   $f(2) = \dfrac{1}{8} \times 2^3 - \dfrac{1}{2} \times 2^2 - 4 = 1 - 2 - 4 = -5$.
   $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -\dfrac{1}{2}(x-2) - 5 = -\dfrac{1}{2}x - 4$.
   $\boxed{\text{La tangente } (d) \text{ à la courbe de } f \text{ au point d'abscisse 2 a bien pour équation } y = -\dfrac{1}{2}x - 4.}$

   (b) Tracer (d).

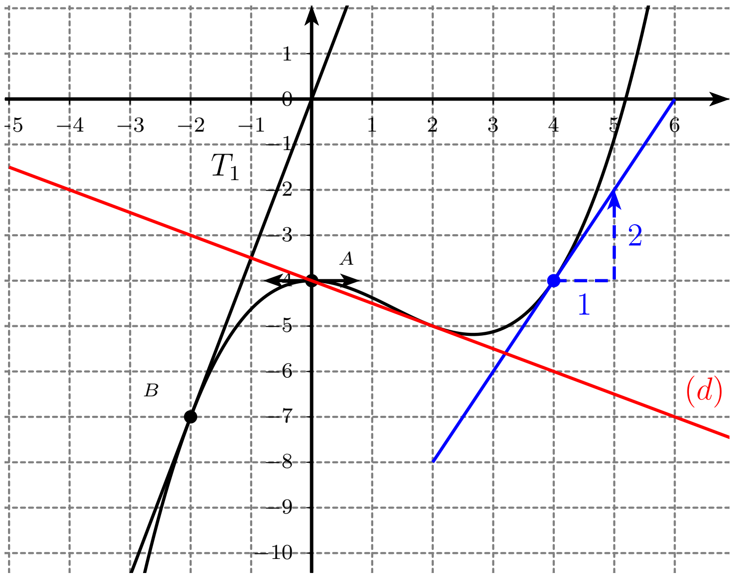
x	0	2
y	-4	-5

   (c) Étudier par le calcul la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).
   On étudie le signe de $f(x) - (-\dfrac{1}{2}x - 4)$.

$$\begin{aligned} f(x) - (-\frac{1}{2} - 4) &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4 + \frac{1}{2}x + 4 \\ &= \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{8}x \times (x^2 - 4x + 4) \\ &= \frac{1}{8}x(x-2)^2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\frac{1}{8}x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$\frac{1}{8}x(x-2)^2$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$\mathscr{C}_f$ et (d) se coupent aux points d'abscisses 0 et 2.
Sur $]-\infty;0[$, $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de (d).
Sur $]0;2[\cup]2;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (d).



Exercice 5 (bonus, 3 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2+1}$.

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x^2+1}$.
   Représenter sur ce graphique les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). Justifier.
   Pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} - u_n = u_n - \dfrac{1}{(u_n)^2+1} - u_n = -\dfrac{1}{(u_n)^2+1} < 0$ (car $(u_n)^2 + 1 > 0$).
   $\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ est décroissante.}}$
3. Compléter l'algorithme suivant qui détermine et affiche le plus petit entier p tel que $u_p < -6$.

   N prend la valeur 0
   U prend la valeur 2
   Tant que $U \geqslant -6$
       N prend la valeur $N+1$
       U prend la valeur $U - \dfrac{1}{1+U^2}$
   Fin Tant que
   Afficher N

4. Programmer cet algorithme à la calculatrice et donner la valeur de p.
   $\boxed{\text{Le plus petit entier } p \text{ tel que } u_p < -6 \text{ est } p = 82.}$
5. Peut-on affirmer que pour tout $n \geqslant p$, $u_n < -6$? Justifier.
   Comme $u_{82} < -6$ et (u_n) est décroissante, pour tout $n \geqslant 82$, $u_n \leqslant u_{82} < -6$.
   $\boxed{\text{Oui, on peut affirmer que } u_n \text{ est strictement inférieur à } -6 \text{ pour tout entier } n \text{ à partir de 82.}}$