Chapitre 5 : Suites arithmétiques. Suites géométriques

I Suites arithmétiques

Définition
Une suite (u_n) est arithmétique si chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre r. Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique.
On a donc la relation suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 sont les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. La raison de cette suite arithmétique est donc 3.

Exercice 1
Déterminer le 4$^{\text{e}}$ terme de la suite arithmétique (u_n) de raison -7 et de premier terme $u_0 = 10$.

Remarque
Une suite (u_n) est arithmétique ssi $u_{n+1} - u_n$ est constant.
Pour étudier si une suite (u_n) est arithmétique, on peut étudier si $u_{n+1} - u_n$ est constant.

Théorème (terme général d'une suite arithmétique de raison r)
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison r.
Alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.
Si (u_n) a pour premier terme u_1, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.

Remarque
On a aussi une formule pour exprimer u_n à partir d'une terme u_p quelconque :
Pour tous entiers naturels n et p, $u_n = u_p + (n-p) \times r$.

Exercice 2
La suite arithmétique (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $r = -\dfrac{1}{2}$. Calculer u_{2012}.

Propriété (variation des suites arithmétiques)
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. (u_n) est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.
2. (u_n) est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.
3. (u_n) est constante si et seulement si $r = 0$.

Démonstration
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ (par définition).
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ssi $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ssi $r > 0$.
Et $u_{n+1} - u_n < 0$ ssi $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ssi $r < 0$. □

Remarque
Une suite arithmétique est donc toujours monotone.
Les suites arithmétiques sont la restriction à $\mathbb{N}$ des fonctions affines.
Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés.

Propriété (somme des n premiers nombres entiers naturels)
Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration
$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
$S_n = n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 2 + 1$
En additionnant membre à membre, il vient
$2 \times S_n = (1+n) + (2+n-1) + \cdots + (n-1+2) + (n+1)$
$2 \times S_n = n \times (n+1)$, donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Exercice 3
Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 400$.

Théorème (somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique)
Soit (u_n) une suite arithmétique.

1. Si le premier terme est u_0, alors pour tout entier $n \geqslant 0$:
$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$$
2. En partant de u_1, on a pour tout $n \geqslant 1$,
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$
3. De façon générale, pour la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :
$$S = \frac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \\
&= (n+1)u_0 + r(1 + 2 + \cdots + n) \\
&= (n+1)u_0 + \frac{rn(n+1)}{2} \\
&= (n+1)\frac{2u_0 + nr}{2} \\
&= (n+1)\frac{u_0 + (u_0 + nr)}{2} \\
&= \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)
\end{aligned}$$

Exercice 4
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 8$.
Déterminer la somme des 25 premiers termes de la suite (u_n).

Remarque (utile pour des calculs de sommes arithmétiques)
Soit $a + \cdots + A$ une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r > 0$.
Alors, la somme contient $\dfrac{A-a}{r} + 1$ termes.

II Suites géométriques

Définition
Une suite géométrique est une suite où chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre non nul q appelé la raison.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q$$

Exemple : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 sont les premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 (ce sont les puissances successives de 2).

Remarque
1. Si $q > 0$, les termes de la suite (u_n) sont tous de même signe (le signe du premier terme).
2. Si $q < 0$, les signes des termes de la suite alternent.

Théorème (terme général d'une suite géométrique)
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q.
1. Si le premier terme est u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = u_0 \times q^n$.
2. Si le premier terme de la suite est u_1, alors pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

Remarque
À partir d'un terme u_p quelconque, pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exercice 5
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $q = -\dfrac{1}{3}$. Calculer u_5.

Propriété (variation de (q^n))
Soit q un nombre réel tel que $q \neq 0$ et $q \neq 1$.
1. Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
3. Si $q < 0$, alors la suite (q^n) n'est pas monotone (ni croissante ni décroissante).

Démonstration
Si $q < 0$, alors la suite (q^n) est alternée (chaque terme est de signe contraire du prédédent), donc la suite n'est ni croissante ni décroissante.
Sinon, $q > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^{n+1} - q^n = q^n \times q - q^n = q^n(q-1)$.
Si $0 < q < 1$, $q - 1 < 0$, et comme $q > 0$, $q^n > 0$.
Par produit, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1) < 0$, et la suite est strictement décroissante.
Si $q > 1$, alors $q - 1 > 0$, et comme $q > 0$, $q^n > 0$.
Alors, $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1) > 0$, et la suite est strictement croissante. □

Conséquence
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 0$ et différente de 1.

1. Si $q > 1$ alors (u_n) est strictement croissante.
2. Si $0 < q < 1$, alors (u_n) est strictement décroissante.

Remarque
Si une grandeur u_n subit toujours la même évolution de taux t, alors la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1 + t$.
En effet, $u_{n+1} = u_n + t \times u_n = (1 + t) \times u_n$.
Exemple : la valeur u_n d'une voiture à la revente baisse de 12 % chaque année.
$u_{n+1} = u_n - 0,12u_n = (1 - 0,12)u_n = 0,88u_n$.
La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1 + t = 1 - 0,12 = 0,88$.

Théorème (somme des premières puissances entières d'un nombre)
Soient q un nombre réel et n un nombre entier, $n \geqslant 1$.

1. Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$, alors $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{somme de } n+1 \text{ termes}} = n + 1$.

Démonstration

1. On suppose $q \neq 1$. Notons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$.
   Si on multiplie cette égalité par q, on obtient $qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$.
   En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient :
   $$S - qS = 1 - q^{n+1}$$
   $$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$
   Ainsi (on peut diviser puisqu'on suppose $q \neq 1$), $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Evident (il y a bien $n + 1$ termes en remarquant que $1 = q^0$, et $q = q^1$). □

Théorème (somme des premiers termes d'une suite géométrique)
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On suppose $q \neq 1$.

1. Si le premier terme est u_0, alors $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si le premier terme est u_1, alors $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

On retiendra :
$$S = (\text{premier terme}) \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

Application :
Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$.
$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \dfrac{1 - 2^9}{1 - 2} = \dfrac{1 - 512}{-1} = 511$.

III Compléments

III.1 Le symbole sigma Σ

Théorème (linéarité de la somme)
Soient x_0, x_1, ..., x_n $(n+1)$ nombres réels. Soient a et b des réels. alors,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b) &= \sum_{i=0}^{n}ax_i+\sum_{i=0}^{n}b \\ &= a\sum_{i=0}^{n}x_i+(n+1)\times b\end{aligned}$$

III.2 Pourquoi suites « arithmétiques », et « géométriques » ?

Si (u_n) est une suite arithmétique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}, le terme central est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

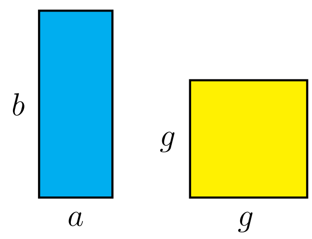
$$u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$$

Si (u_n) est une suite géométrique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}, le terme central est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

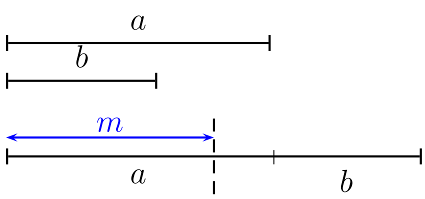
$$u_n = \sqrt{u_{n-1}\times u_{n+1}}$$

III.3 Moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres

Soient a et b deux nombres réels. La moyenne arithmétique de a et de b est $m=\dfrac{a+b}{2}$
La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est $g=\sqrt{ab}$.
Le carré de côté g a la même aire que le rectangle de dimensions a et b (d'où moyenne « géométrique »).
En effet, $g^2=ab$.

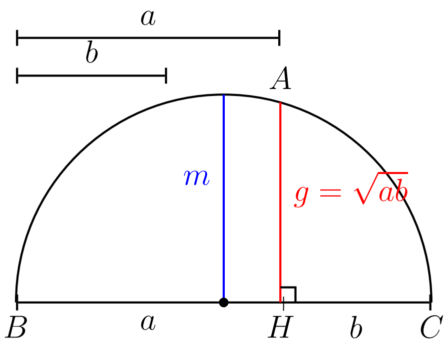


III.4 Construction de la moyenne arithmétique à la règle et au compas



Pour la moyenne arithmétique, il suffit de tracer la médiatrice du segment de longueur $a+b$ pour diviser la longueur $a+b$ en deux parties égales. $m=\dfrac{a+b}{2}$.

III.5 Construction de la moyenne géométrique à la règle et au compas



On trace le cercle de diamètre $[BC]$, $(BC = a + b)$. Le point A est sur le cercle, et donc ABC est rectangle en A.
Alors, la hauteur AH du triangle rectangle ABC est la moyenne géométrique de a et b.
$a = BH$, et $b = CH$. Pour montrer que $AH = \sqrt{BH \times CH}$, on montre que $AH^2 = BH \times CH$ (équivalent).

$$\begin{array}{rcl}
AH^2 & = & \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} \\
 & = & (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \\
 & = & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
 & = & 0 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
 & = & BH \times CH + BH \times CH - BH \times CH \\
 & = & BH \times CH \\
AH^2 & = & ab \\
AH & = & \sqrt{ab}
\end{array}$$

Remarque
La figure précédente permet de visualiser le fait que la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique $(g \leqslant m)$ et que $g = m$ uniquement lorsque $a = b$.