Exercices sur les suites arithmétiques et géométriques

Exercice 1
À 8h, on injecte à un malade 5 centilitres d'anti-douleur. L'organisme du patient élimine 0,4 cL de produit par heure. On appelle u_n la quantité (en cL) présente dans le sang à l'instant $8+n$ exprimé en heures.

1. Déterminer u_0, u_1, et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite, et préciser la raison et le premier terme.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Il faut refaire l'injection dès qu'il reste moins de 1,5 cL de produit dans le sang. À quelle heure faudra-t-il refaire une injection ?

Exercice 2
Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine 2000 unités seront produites, puis la production augmentera de 10% chaque semaine. On note u_n le nombre de systèmes produits la n^{e} semaine.

1. Calculer u_1, u_2, et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Que peut-on en déduire ?
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines.

Exercice 3
Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est de 1013 hectopascals.
On suppose que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m.
On note p_n la pression en hectpascal à l'altitude $100n$ mètres. On a donc $p_0 = 1013$. On arrondira les résultats à l'unité.

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n. En déduire la nature de la suite, et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Exprimer p_n en fonction de n.
4. Calculer la pression à 4800 m d'altitude.
5. Déterminer à partir de quelle altitude (à 100 m près) la pression devient inférieure à 600 hectopascals.

Exercice 4
On veut creuser un puits. Le premier mètre coûte 100 euros, le second coûte 120 euros, le 3$^{\text{e}}$ coûte 140 euros et ainsi de suite, en augmentant de 20 euros à chaque mètre creusé. On note u_n le prix du n^{e} mètre creusé.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{30}. Interpréter.
4. Calculer $u_1 + u_2 \cdots + u_{30}$. Interpréter.
5. On dispose d'un budget de 33000 euros. Quelle profondeur maximale peut-on creuser ?

Exercice 5
Un globetrotter a parié qu'il pouvait parcourir 5000 km à pied. Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour, la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1% tous les jours. On note d_n la distance parcourue le n^{e} jour.

1. Indiquer d_1, et calculer d_2.
2. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. En déduire la nature de la suite et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Exprimer d_n en fonction de n.
4. Calculer, en fonction de n, la distance L_n parcourue au bout de n jours.
5. Justifier que $L_n < 5000$. Que peut-on dire du pari du globetrotter ?
6. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours nécessaires pour qu'il parcoure 4999 km.

Exercice 6
Une entreprise emprunte 2 000 000 € à une banque, à rembourser par mensualités sur 10 ans.

Partie A
Dans la première formule proposée par la banque, l'entreprise rembourse 8000 € lors de la première mensualité, puis chaque mensualité suivante augmente de
300 €. On appelle u_1 la première mensualité et u_{120} la dernière.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   Reconnaître la nature de la suite (u_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme totale remboursée en 10 ans par l'entreprise.

Partie B
La banque propose une deuxième formule à l'entreprise : on appelle v_1 le premier versement, à déterminer. Chaque mensualité augmente de 1 % par rapport à la précédente, jusqu'à v_{120}.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Reconnaître la nature de la suite (v_n) et préciser ses caractéristiques.
2. Exprimer v_n en fonction de n et de v_1.
3. Exprimer le versement total en 10 ans en fonction de v_1 (On donnera une valeur exacte).
4. Que doit valoir v_1 pour que le versement total soit de 3 000 000 € seulement ? on arrondira au centime près.

Exercice 7 (une suite arithmético-géométrique)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit (V_n) la suite définie par :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ V_n = u_n + 5.$$
   (a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.
   (b) Exprimer V_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Exprimer en fonction de n :
   (a) $S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.
   (b) $S' = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Exercice 8
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ (on admet que $u_n \neq 0$ pour tout n).

1. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, donner sa raison et son premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 9
La suite (u_n) est définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n - 2n + 5$.

1. En considérant les premiers termes, montrer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
2. Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = u_{n+1} - u_n$.
   Montrer que (V_n) est arithmétique, et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Exprimer V_n en fonction de n.
4. On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n.
5. Démontrer que $S_n = u_{n+1} - u_0$.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 10 (des calculs de sommes)
Calculer les sommes suivantes (en justifiant le résultat) :

1. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{60}$,
   où (u_n) est la suite arithmétique de raison $r = -5$ et de premier terme $u_0 = 1$.
2. $T = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$.
3. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{100} (3k + 7)$.
4. $B = \displaystyle\sum_{j=1}^{49} \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$.

Exercice 11

1. Soit la fonction Python suivante :
```
def A(n):
    L=[1-4*i for i in range(n+1)]
    return(L)
```
   (a) Écrire A(6) en extension.
   (b) La fonction A renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes d'une suite. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de cette suite.
2. Écrire une fonction Python B d'argument n qui renvoie la liste des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique définie par $u_0 = 5$ et de raison 3. Donner la liste en extension lorsqu'on entre $n = 7$.