Chapitre 6 : Étude qualitative des fonctions. Fonctions affines.

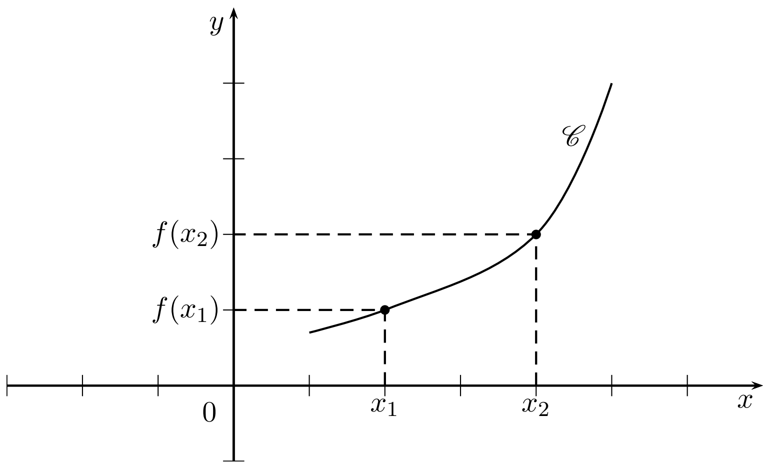
I Étude qualitative des fonctions

Dans ce paragraphe, la fonction f est définie sur un intervalle I et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

I.1 Fonction croissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

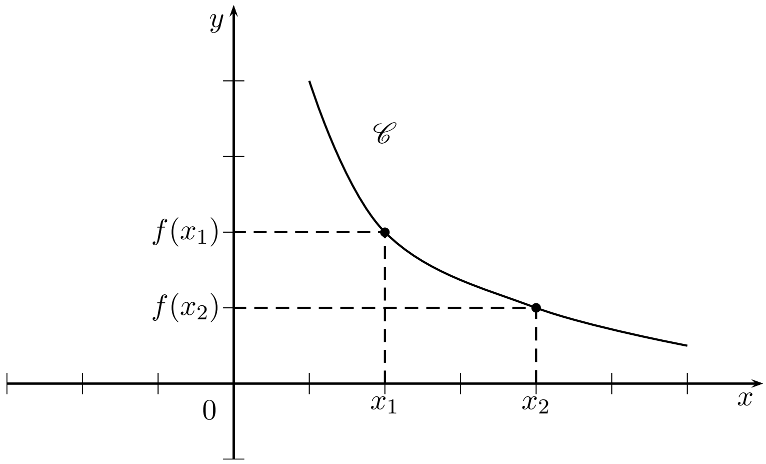


Remarque
Une fonction croissante conserve l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2.

I.2 Fonction décroissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenent à I :

$$\text{si } x_1 < x_2, \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2).$$



Remarque
Une fonction décroissante change l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.

Remarque
En remplaçant avec des inégalité strictes dans les définitions précédentes, on définit une fonction strictement croissante (resp strictement décroissante) :
La fonction f est strictement croissante sur I :

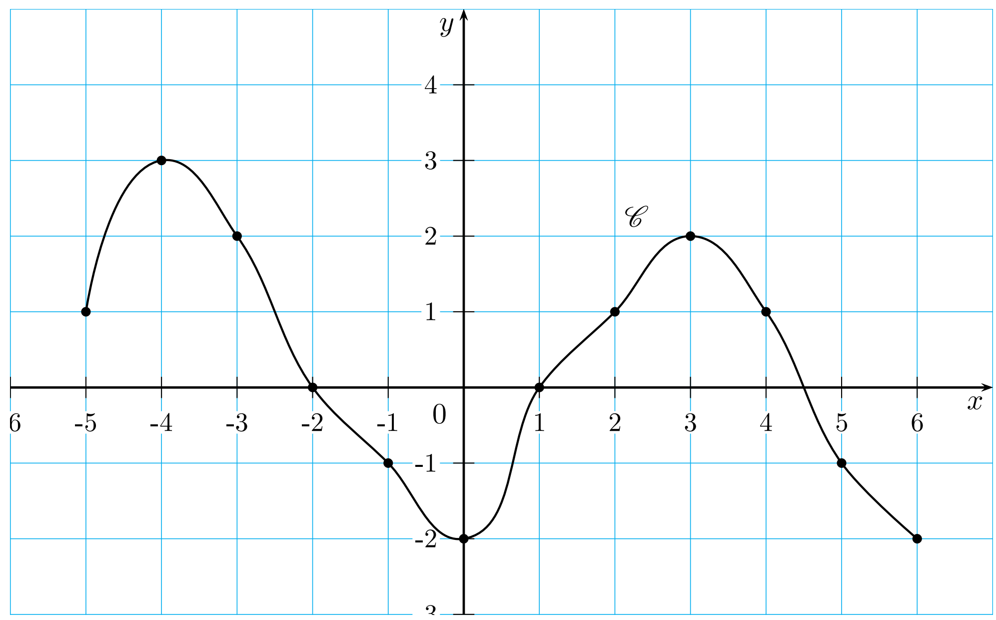
$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est strictement décroissante sur I :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

I.3 Tableau de variations d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variations.



Le tableau de variation de f est :

x	-5		-4		0		3		6
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Exercice 1
Compléter le tableau de variations d'une fonction dont la courbe représentative est donnée sur un intervalle : ressource 801

I.4 Extrema d'une fonction

Définition
Soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \leqslant f(a).$$
Le maximum de f sur I est $f(a)$.
2. On dit que f admet un minimum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \geqslant f(a).$$
Le minimum de f sur I est $f(a)$.

Exemple :
Sur l'exemple précédent, le maximum de f sur $[-5; 6]$ est 3, il est atteint en -4.
Le minimum de f est -2, il est atteint en 0 et en 6.

II Fonctions affines

Définition
Une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x réel $f(x) = ax + b$.
On peut toujours définir une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Exemple : la fonction f donnée par $f(x) = 2x + 3$.

II.1 Représentation graphique d'une fonction affine

Théorème
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

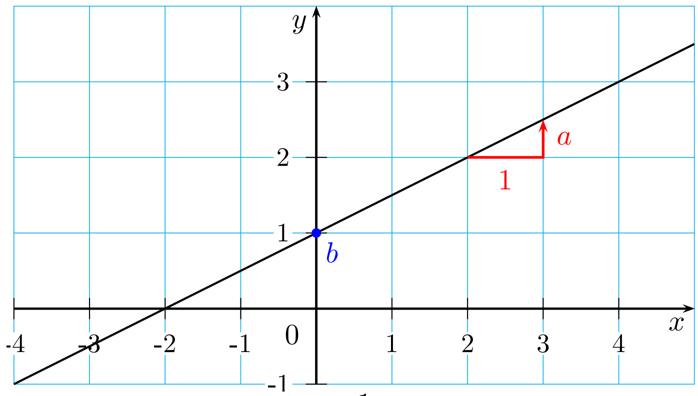
Démonstration
Soit $f(x) = ax + b$.
$f(0) = b$. Donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0; b)$.

$f(1) = a + b$. Donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point $B(1; a+b)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.
Soit x un nombre réel, alors $f(x) = ax + b$.
Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x est $M(x; ax+b)$.
Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les points A, B et M sont alignés.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} xy' - yx' &= 1 \times ax - a \times x \\ &= ax - ax \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$).
Ainsi, $M \in (AB)$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x; ax+b)$ est aligné avec A et B, la courbe représentative de f est la droite (AB). □

Vocabulaire :
Soit f définie par $f(x) = ax + b$.
- Le réel a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f.
  « quand on avance de 1, on monte de a ».
- le réel b est l'ordonnée à l'origine. La droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$.



$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine :
Comme c'est une droite, il suffit de construire deux points.
- On choisit deux valeurs de x, (qui donnent des calculs simples si possible)
- on calcule les images correspondantes,
- on place les points obtenus, et on trace la droite les reliant.

Exercice 2
Tracer la courbe de la fonction définie par $f(x) = -\frac{2}{5}x + 3$.

x	0	5
y	...	...

Remarque
Cas particuliers :
- Lorsque $a = 0$, $f(x) = b$.
  La fonction est dite constante. La courbe de f est alors un droite parallèle à l'axe des abscisses.

– Lorsque $b = 0$, $f(x) = ax$.
La fonction est dite linéaire. La courbe de f est une droite passant par O.

II.2 Sens de variation d'une fonction affine

Théorème
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, f est constante et $\mathscr{C}_f$ une droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 3
Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction affine : ressource 2166

II.3 Signe de $ax + b$

Théorème
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.
Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\frac{b}{a}$.
– Si $a > 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$-$	0	$+$	

– Si $a < 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$+$	0	$-$	

Exercice 4
Compléter le tableau de signes d'une fonction affine : ressource 2543

Exemple :

1. $f(x) = 2x - 6$.
   $a = 2$, et $b = -6$.
   $2x - 6 = 0$ lorsque $x = 3$.
   Comme $a = 2 > 0$, on a :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x - 6$		$-$	0	$+$	

2. $g(x) = 2 - 7x$.
   $a = -7$, $b = 2$.

$2 - 7x = 0$ ssi $x = \dfrac{2}{7}$.
Comme $a = -7 < 0$, on a :

x	$-\infty$		$2/7$		$+\infty$
$2-7x$		$+$	0	$-$	

II.4 Application aux inéquations

Propriété (≪ règle des signes ≫)
Le produit (ou quotient) de deux nombres positifs est positif.
Le produit (ou quotient de deux nombres négatifs est positif.
Le produit (ou quotient) de deux nombres de signes contraires est négatif.

Méthode pour les inéquations

1. Faire apparaître 0,
2. Factoriser (mettre au même dénominateur s'il y a des divisions),
3. Faire un tableau de signe (une ligne pour chaque facteur),
4. Conclure (donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles).

Exercice 5
Résoudre l'inéquation $6x < 2x^2$.

$$\begin{aligned} 6x &< 2x^2 \\ 6x - 2x^2 &< 0 \\ x(6-2x) &< 0 \end{aligned}$$

Valeurs clés :
$x = 0$
$6 - 2x = 0$ lorsque $x = 3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(6-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{L'ensemble solution est } S =]-\infty; 0[\cup]3; +\infty[.}$

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+5}{x} \geqslant 4$.

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x} &\leqslant 4 \\ \frac{x+5}{x} - 4 &\leqslant 0 \\ \frac{x+5}{x} - \frac{4x}{x} &\leqslant 0 \\ \frac{x+5-4x}{x} &\leqslant 0 \\ \frac{5-3x}{x} &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Valeurs clés :
$5-3x=0$ lorsque $x=\dfrac{5}{3}$.
$x=0$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		0		$5/3$		$+\infty$
$5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5-3x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty;0\right[\cup \left[\frac{5}{3};+\infty\right[.}$$

Exercice 7
Déterminer le signe d'un produit de fonctions affines : ressource 2544

Exercice 8
Inéquation du second degré en trouvant une factorisation : ressource 2923

III Compléments

III.1 Caractérisation des fonctions affines

Définition
Soit f une fonction. Pour u et v deux nombres réels distincts, le taux de variation de f entre u et v est le rapport $\dfrac{f(v)-f(u)}{v-u}$.

Théorème

1. Soit f la fonction affine $x \mapsto ax+b$. Pour tous nombres réels distincts u et v, le taux de variation de f entre u et v est égal a :

$$\text{pour tous } u \text{ et } v \text{ réels distincts, on a } \frac{f(v)-f(u)}{v-u} = a.$$

   Autres formulations : l'accroissement de la fonction f est proportionnel à l'accroissement de la variable x, et le coefficient de proportionnalité est a.
   Lorsque x varie d'un nombre h, $f(x)$ varie de $a \times h$.
2. Propriété réciproque : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le taux de variation est constant, égal au nombre réel a. Alors f est la fonction affine définie par $f(x) = ax+b$ où $b = f(0)$.

Méthode pour déterminer l'expression d'une fonction affine f dont on connaît la représentation graphique :

- Repérer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur $\mathscr{C}_f$.
- Le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
- Alors, $f(x) = ax + b$, et a est connu. On trouve b en remplaçant les coordonnées d'un des points A ou B dans la relation précédente.