CRSA1. Contrôle n° 10
Corrigé

Sujet 1

Exercice 1 (3 points)
Compléter les formules de cours sur les primitives.

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Exercice 2 (3 points)
Donner une primitive des fonctions suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x) = 6\mathrm{e}^{6x}$
   $A(x) = \mathrm{e}^{6x}$.
2. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $b(x) = \dfrac{-14}{2x+3} = -7 \times \dfrac{2}{2x+3}$
   $B(x) = -7\ln(2x+3)$.

Exercice 3 (3 points)
On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = x\ln(x) - x$.

1. Vérifier que F est une primitive de la fonction ln sur $]0; +\infty[$.
   Dérivée d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.
   $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.
2. En déduire $\displaystyle\int_1^3 4 + \ln(x)\,\mathrm{d}x$
   $\displaystyle\int_1^3 4 + \ln(x)\,\mathrm{d}x = [4x]_1^3 + F(3) - F(1) = (12-4) + 3\ln(3) - 3 - (1\ln(1) - 1) = 8 + 3\ln(3) - 3 + 1 = 6 + 3\ln(3)$.

Exercice 4 (4 points)
Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \displaystyle\int_1^2 (6 + \mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{d}x$
   $I = \left[6x + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_1^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^4 - 6 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 = 6 + \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2)$.
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t$
   $J = \left[\dfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{2}\sin(\pi/2) - \dfrac{1}{2}\sin(0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 (3 points)
Un mobile se déplace à la vitesse $v(t) = t^2 + 2t$.

1. Calculer la distance parcourue durant la première minute.
   $\displaystyle\int_0^{60} v(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} + t^2\right]_0^{60} = 72000 + 3600 = 75600$ m.
2. Calculer la vitesse moyenne.
   $m = \dfrac{1}{60-0} \times \displaystyle\int_0^{60} v(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{75600}{60} = 1260$ m/s.

Exercice 6 (4 points)
Calculer l'aire de la partie hachurée du plan.
Cette aire est l'intégrale de $f(x) - g(x) = -x^2 + 8x - 12$ sur $[2; 6]$.
$A = \displaystyle\int_2^6 (-x^2 + 8x - 12)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x\right]_2^6$
$A = \dfrac{32}{3}$.

Sujet 2

Exercice 7 (3 points)
Compléter les formules de cours sur les primitives.

Fonction f	Une primitive F	Intervalle de validité
$f(x) = 8$	$F(x) = 8x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$, $a \neq 0$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

Exercice 8 (3 points)
Donner une primitive des fonctions suivantes.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x) = 2\mathrm{e}^{10x}$
   $A(x) = \dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{10x}$.
2. Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $b(x) = \dfrac{11}{11x+3}$
   $B(x) = \ln(11x+3)$.

Exercice 9 (3 points)
On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = x\ln(x) - x$.

1. Vérifier que F est une primitive de la fonction ln sur $]0; +\infty[$.
   $F'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.
2. En déduire $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 5\ln(x)\,\mathrm{d}x$
   $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} 5\ln(x)\,\mathrm{d}x = 5F(\mathrm{e}) - 5F(1) = 5(\mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e}) - 5\times(1\ln(1) - 1) =$
   $5\times 0 + 5 = 5$.

Exercice 10 (4 points)
Calculer les intégrales suivantes.

1. $I = \displaystyle\int_1^2 (6x + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$
   $I = [3x^2 + \ln(x)]_1^2 = 12 + \ln(2) - 3 - \ln(1) = 9 + \ln(2)$.
2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2t)\,\mathrm{d}t$
   $J = \left[-\dfrac{1}{2}\cos(2t)\right]_0^{\pi/4} = -\dfrac{1}{2}\cos(\pi/2) + \dfrac{1}{2}\cos(0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 11 (3 points)
On fabrique un composant automobile en fonte.

1. Vérifier que $F(t) = -27400\mathrm{e}^{-0,05t} + 30t$ est une primitive de $f(t) = 1370\mathrm{e}^{-0,05t} + 30$.
   $F'(t) = -27400(-0,05)\mathrm{e}^{-0,05t} + 30 = 1370\mathrm{e}^{-0,05t} + 30 = f(t)$.
2. En déduire la température moyenne durant les 20 premières heures.
   $m = \dfrac{1}{20}\displaystyle\int_0^{20} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{F(20) - F(0)}{20} \approx 896$.
   La température moyenne durant les 20 premières heures est de 896°C.

Exercice 12 (4 points)
Calculer l'aire de la partie hachurée du plan.
Cette aire est l'intégrale de $g(x) - f(x) = -x^2 + 6x - 3$ sur $[1; 5]$.

$A = \displaystyle\int_1^5 (-x^2 + 6x - 3)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 3x\right]_1^5$

$A = \dfrac{56}{3}$.