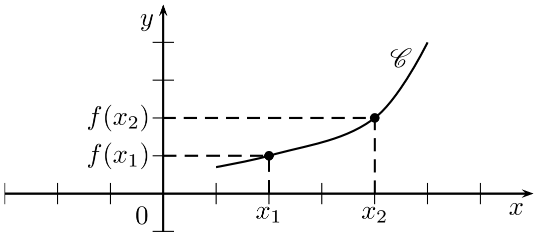
Chapitre 5 : Étude qualitative des fonctions

I Fonction croissante, fonction décroissante sur un intervalle

I.1 Fonction croissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est croissante I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\dots$$

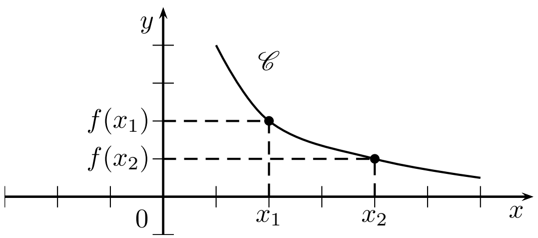


Remarque
Une fonction croissante conserve l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1)\dots f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans le même ordre que x_1 et x_2 (l'inégalité est dans le même sens entre deux réels et leurs images respectives).

I.2 Fonction décroissante

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est décroissante sur I lorsque pour tous x_1 et x_2 appartenant à I :

$$\dots$$



Remarque
Une fonction décroissante change l'ordre : si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1)\dots f(x_2)$.
Donc $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont rangés dans l'ordre inverse de x_1 et x_2.

Remarque
En remplaçant avec des inégalités strictes dans les définitions précédentes, on définit une fonction strictement croissante (resp strictement décroissante) :
La fonction f est strictement croissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est strictement décroissante sur I lorsque :

$$\text{pour tous } x_1, x_2 \in I, \text{ si } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2).$$

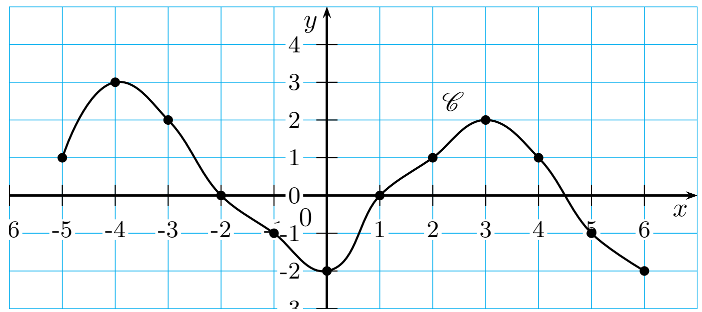
Exercice 1
On considère la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les images par f de -3, -1, 0, 2, et 5.
2. En donnant un contre-exemple, montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer de même que f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. En revenant à la définition, montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$

Exercice 2
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3x + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

II Tableau de variations d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variations.
Exemple :



III Extrema d'une fonction

Définition
Soit f une fonction définie sur I. Soit $a \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \dots f(a).$$
Le maximum de f sur I est $f(a)$.
2. On dit que f admet un minimum en a lorsque
$$\text{pour tout } x \in I,\ f(x) \dots f(a).$$
Le minimum de f sur I est $f(a)$.

Exemple : Sur l'exemple précédent, le maximum de f sur $[-5; 6]$ est ..., il est atteint en ....
Le minimum de f est ..., il est atteint en ...et en ....

Exercice 3
On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

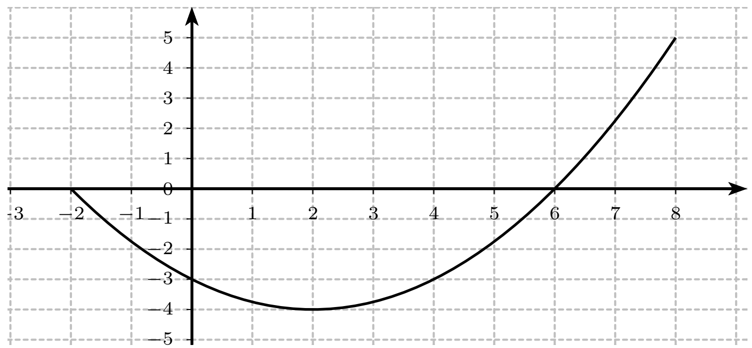
x	-3		-1		3		5
$f(x)$	4	↘	1	↗	2	↘	-1

De plus, l'équation $f(x) = 0$ a une solution qui est 4.

1. Indiquer le maximum de f sur$[-3; 5]$ et en quelle(s) valeur(s) il est atteint. (On ne demande pas de justifier).
2. Comparer $f(-2,5)$ et $f(-2,4)$. Justifier.
3. Compléter l'encadrement suivant (sans justification) :
Lorsque $x \in [-3; -1]$, $\quad \dots \leqslant f(x) \leqslant \dots.$
4. Donner un encadrement de $f(-2)$ et de $f(3,6)$.
5. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) "Pour tout $x \in [-3; 5]$, $f(x) \geqslant -2$."
   (b) "Il existe au moins un réel x dans l'intervalle $[-3; 5]$ tel que $f(x) > x$."
6. Tracer la courbe d'une fonction f compatible avec toutes les données de l'énoncé.

Exercices sur l'étude qualitative des fonctions

Exercice 4
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Lire $f(4)$ et $f(6)$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Donner le maximum de f sur son ensemble de définition, et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.
5. Donner le minimum de f et préciser en quelle valeur il est atteint.
6. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -3$.
7. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < -3$.

Exercice 5
Soit f une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	-3		1		4
$f(x)$	-2	↗	1	↘	-1

1. Comparer $f(2,5)$ et $f(3,4)$. Justifier.
2. Comparer $f(-0,4)$ et $f(-0,1)$. Justifier.
3. On admet de plus que f vérifie les conditions suivantes :
Les antécédents de 0 par f sont -1 et 2, et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
Tracer une courbe de fonction compatible avec toutes les données de l'énoncé.