Correction du devoir maison n° 8

Exercice 1 (ex2 fiche polycopiée)

On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams). Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 70% des messages reçus sont des spams
- 95% des spams sont éliminés
- 2% des messages bienvenus sont éliminés

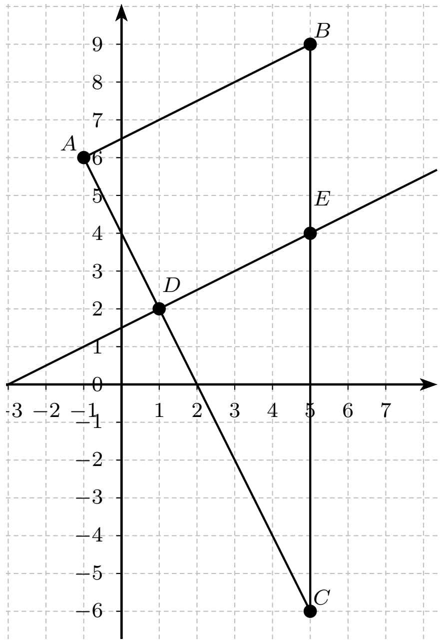
1. Compléter le tableau d'effectifs suivant (aucune justification n'est attendue) :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés	665	6	671
Messages conservés	35	294	329
Total	700	300	1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants : S : « le message est un spam », et E : « le message est éliminé »
On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.
   (a) Calculer $P(S)$ et $P(E)$.
   Il y a équiprobabilité.
   $P(S) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas total}} = \dfrac{700}{1000} = 0,7$.
   $P(E) = \dfrac{671}{1000} = 0,671$.
   (b) Calculer $P(\overline{S})$.
   $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,7 = 0,3$.
   (c) Traduire par une phrase l'événement $S \cap E$ puis calculer sa probabilité $P(S \cap E)$.
   $S \cap E$: « le message est un spam et il est éliminé ».
   $P(S \cap E) = \dfrac{665}{1000} = 0,665$.
   (d) Traduire par une phrase l'événement $S \cup E$ puis calculer sa probabilité $P(S \cup E)$.
   $S \cup E$: « le message est un spam ou le message est éliminé ».
   $P(S \cup E) = P(S) + P(E) - P(S \cap E) = 0,7 + 0,671 - 0,665 = 0,706$.
   (e) Le logiciel se trompe s'il conserve un spam ou s'il élimine un message bienvenu. Quelle est la probabilité de l'événement A : « le logiciel se trompe » ?
   $P(A) = P(S \cap \overline{E}) + P(\overline{S} \cap E) = \dfrac{35}{1000} + \dfrac{6}{1000} = 0,041$.

Exercice 2 (Vecteurs)

1. Dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ du plan, placer les points $A(-1; 6)$, $B(5; 9)$, $C(5; -6)$ et $D(1; 2)$.



2. (a) Montrer que $AB = 3\sqrt{5}$. puis calculer la longueur AC.
   $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5+1)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
   $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5+1)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 144}$.
   $AC = \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5} = 6\sqrt{5}$.
   (b) On admet que $BC = 15$. En déduire la nature du triangle ABC. Justifier.
   D'une part, $BC^2 = 15^2 = 225$.
   D'autre part, $AB^2 + AC^2 = 45 + 180 = 225$.
   Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.
3. (a) Déterminer les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1-5 \\ 2-(-6) \end{pmatrix}$, et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -1-5 \\ 6-(-6) \end{pmatrix}$, puis $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$. Que peut-on en déduire pour les points A, C, D ?

$\frac{2}{3} \times (-6) = -4$, et $\frac{2}{3} \times 12 = 8$.

Donc $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires, donc les points A, C et D sont alignés.

4. Soit $E(5;4)$. Montrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

$(AB)//(DE)$ ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DE}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires, et les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Exercice 3 (Problème, mise en équation)

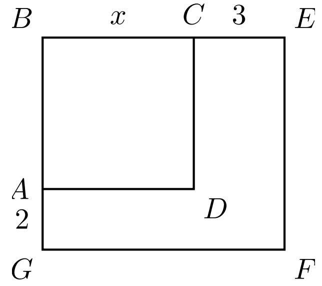
Partie 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-6)(x+1)$.
   En développant, $(x-6)(x+1) = x^2 + x - 6x - 6 = x^2 - 5x - 6 = f(x)$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-6)(x+1)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des fcteurs est nul.
   $f(x) = 0$ soit $(x-6)(x+1) = 0$.
   Donc $x - 6 = 0$ ou $x + 1 = 0$.
   $x = 6$ ou $x = -1$.
   Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 6 et -1.

Partie 2

L'unité est le centimètre. Soient $x \geqslant 0$, et $ABCD$ un carré de côté x. On prolonge le côté $[BC]$ de 3 cm et le côté $[BA]$ de 2 cm comme sur la figure ci-dessous.



Le but de cette partie est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x l'aire du rectangle $BEFG$ est le double de l'aire du carré $ABCD$.

1. Exprimer en fonction de x l'aire $\mathcal{A}(x)$ du carré $ABCD$ et l'aire $\mathcal{B}(x)$ du rectangle $BEFG$.
   $\mathcal{A}(x)$ est l'aire du carré $ABCD$ de côté x, donc $\mathcal{A}(x) = x^2$.
   $\mathcal{B}(x)$ est l'aire du rectangle $BEFG$ qui a pour dimensions $BE = x + 3$ et $BG = x + 2$.
   Donc $\mathcal{B}(x) = (x+2)(x+3)$.
2. Montrer que résoudre l'équation $\mathcal{B}(x) = 2\mathcal{A}(x)$ est équivalent à résoudre l'équation $x^2 - 5x - 6 = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(x) &= 2\mathcal{A}(x) \\ (x+2)(x+3) &= 2x^2 \\ x^2 + 2x + 3x + 6 &= 2x^2 \\ 0 &= x^2 - 5x - 6 \end{aligned}$$

   Donc l'équation $\mathcal{B}(x) = 2\mathcal{A}(x)$ équivaut à $x^2 - 5x - 6 = 0$.
3. Conclure en utilisant la partie 1.
   On a donc $\mathcal{B}(x) = 2\mathcal{A}(x)$ ssi $f(x) = 0$ où f est la fonction de la partie 1. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont 6 et -1.
   Dans ce contexte, x est la longueur du côté du carré, $x \geqslant 0$, on ne garde que la solution positive.
   L'aire du rectangle $BEFG$ est le double de celle du carré $ABCD$ lorsque $x = 6$, c'est-à-dire lorsque le carré mesure 6 cm de côté.