Chapitre 1 : Second degré

I Activité d'introduction

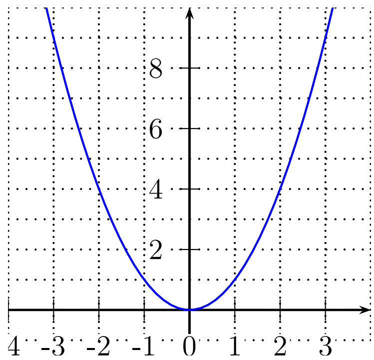
Définition
Une fonction f est une fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) s'il existe des réels a, b, et c, avec $a \neq 0$, tels que :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c.$$

On dit que a, b et c sont les coefficients de f.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
Les coefficients sont $a = 3$, $b = -6$, et $c = 1$.

Remarque
La fonction carré, définie par $f(x) = x^2$ est une fonction du second degré.
Les coefficients sont $a = 1$, $b = 0$, et $c = 0$.



Exercice 1 (avec un algorithme)
On considère l'algorithme suivant donné sous la forme d'une fonction en langage Python :

```
def f(x) :
  a=x+2
  b=x-6
  y=a*b
  return(y)
```

1. Montrer que si l'on entre 8, le nombre affiché en sortie est 20.
2. Déterminer l'expression développée de la fonction f associée à cet algorithme. f est-elle une fonction du second degré ?
3. Étudier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) "l'algorithme renvoie un résultat toujours positif ou nul",
   (b) "f est croissante sur $\mathbb{R}$",
4. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)^2 - 16$.
   (b) En déduire que f admet un minimum de -16 et préciser en quelle valeur il est atteint.

II Forme canonique

Définition (et théorème)
Pour toute fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe des réels α et β uniques tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
L'écriture $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée la forme canonique de f.

Exercice 2
Reconnaître les coefficients a, α et β dans les formes canoniques suivantes :

1. $f(x) = 7(x - 3)^2 + 4$
2. $g(x) = -(x + 6)^2 + 2$
3. $h(x) = -2(x + 0,7)^2 - 11$

Exercice 3
Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2(x + 3)^2 - 29 = -2x^2 - 12x - 65$.

Exercice 4 (mise sous forme canonique)
Mettre sous forme canonique les fonctions suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 24x - 3$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 3x - 4$.

Démonstration de la forme canonique

Posons $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[x^2 + 2 \times x \times \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]
\end{aligned}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

ou encore

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

Ainsi, en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$, on a $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
Ceci prouve l'existence de la forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ et l'unicité de α et β.
Remarque
Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de f.

III Équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$

Définition
Le nombre $x_0 \in \mathbb{R}$ est une racine de la fonction f si $f(x_0) = 0$.

Exercice 5
Déterminer les racines de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 7x$.

Étude du cas général (démonstration)
On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
On part de la forme canonique $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta < 0$.
  Alors $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ et $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$.
  Alors $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
  $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{b}{2a}$.
  L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution qui est $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, on peut parler de $\sqrt{\Delta}$.

$$\begin{array}{rcll}
f(x) & = & a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] & \\
 & = & a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] & \text{(identité remarquable)} \\
 & = & a\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) & \\
 & = & a\left(x - \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) &
\end{array}$$

  L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Théorème (Équation $ax^2 + bx + c = 0$)
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$ ("Delta", appelé le discriminant).

- Si $\Delta < 0$, f n'a pas de racine réelle, et on ne peut pas factoriser $f(x)$.
- Si $\Delta = 0$, alors f a une unique racine (double) qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, et f admet la factorisation
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$
- Si $\Delta > 0$, alors f a deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
On a alors la factorisation
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Exercice 6
Résoudre les équations suivantes.

1. $2x^2 - 3x + 7 = 0$. [1]
2. $4x^2 - 4x + 1 = 0$. [2]
3. $x^2 + 7x + 10 = 0$. [3]

Remarque
Lorsque le trinôme est incomplet, on peut résoudre l'équation du second degré sans passer par le calcul de Δ.

Exercice 7 (sans Δ)
Résoudre les équations suivantes sans calculer le discriminant Δ.

1. $-x^2 + 7x = 0$ [4]
2. $13x^2 + 5 = 0$ [5]
3. $2x^2 - 11 = 0$ [6]

III.1 Somme et produit des racines lorsque $\Delta > 0$

On suppose ici que $\Delta > 0$.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] \end{aligned}$$

1. $\Delta = -47 < 0$, l'équation n'a pas de solution.
2. $\Delta = 0$, l'équation a une solution qui est $\frac{1}{2}$.
3. $\Delta = 9$, puis on trouve $S = \{-5; -2\}$.
4. $S = \{0; 7\}$
5. $S = \varnothing$ (vide)
6. $S = \{-\frac{\sqrt{22}}{2}; \frac{\sqrt{22}}{2}\}$

Par identification :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 &= \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Théorème (Somme et produit des racines)

1. Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ a des racines (i.e. $\Delta > 0$), leur somme est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$.
2. Deux nombres ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ce sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + P$.

Remarque

Le second point fournit une méthode pour trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Exercice 8

Existe-t-il des rectangles dont le périmètre mesure 22 cm et l'aire 24 cm^2 ? Lesquels ?[7]

IV Signe de $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

On repart de la forme canonique $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

- Si $\Delta < 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

avec $\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$ d'où :

x	$-\infty$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a

- Si $\Delta = 0$

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$		$+$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

7. $S = 11$, $P = 24$, $x^2 - 11x + 24 = 0$: les seules dimensions possibles sont 8 et 3.

- Si $\Delta > 0$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

avec $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Dans le cas[8] où $x_1 < x_2$, on a

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

Théorème (Signe du trinôme)

- Si $\Delta < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe de $(-a)$ entre les racines.

8. Sinon, il faut les échanger dans la première ligne et adapter le tableau.

V Variations et aspect graphique

Théorème (Tableau de variation)
Soit $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ une fonction du trinôme du second degré sous forme canonique ($a \neq 0$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

Si $a > 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$, alors

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration
Cas où $a > 0$.
Montrons que f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$.
Soient $u, v \in]-\infty;\alpha]$.
Supposons $u < v$.
On a donc $u < v \leqslant \alpha$.
Ainsi, $u - \alpha \dots v - \alpha \dots 0$.
Or, ...
....
Donc $(u-\alpha)^2 \dots (v-\alpha)^2$
En multipliant par $a > 0$, il vient :

$$a(u-\alpha)^2 \dots a(v-\alpha)^2$$

En ajoutant une constante (β), le sens de l'inégalité est conservé.
On a donc ....
Ainsi, $f(u) \dots f(v)$.
f est .... sur $]-\infty;\alpha]$

Cas où $a < 0$.
Montrons que f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$.
Soient $u, v \in]-\infty;\alpha]$.
Supposons $u < v$.
On a donc $u < v \leqslant \alpha$.
Ainsi, $u - \alpha \dots v - \alpha \dots 0$.
Or, ...
....
Donc $(u-\alpha)^2 \dots (v-\alpha)^2$
En multipliant par $a < 0$, il vient :

$$a(u-\alpha)^2 \dots a(v-\alpha)^2$$

En ajoutant une constante (β), le sens de l'inégalité est conservé.
On a donc ....
Ainsi, $f(u) \dots f(v)$.
f est .... sur $]-\infty;\alpha]$

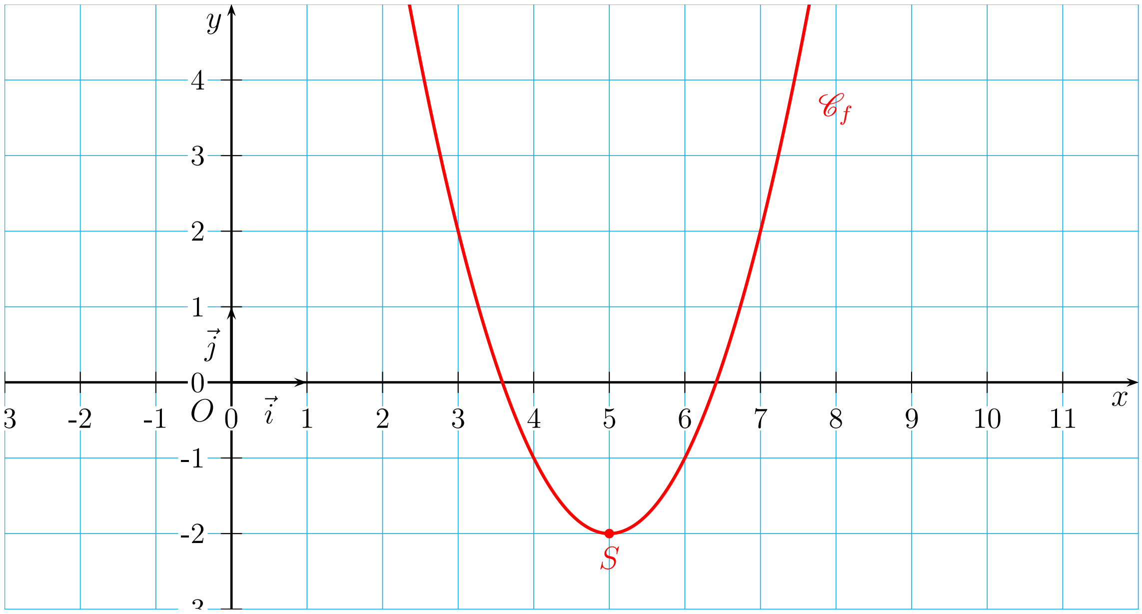
Les deux autres cas qui complètent la démonstration se montrent de façon analogue. □

Exercice 9 (exploiter la forme canonique)
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le tableau de variation.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2(x-5)^2 + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+7)^2 - 9$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 6$

Propriété (Courbe représentative, admis)
Soit f la fonction du second degré sous forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est une parabole :
— tournée vers le haut si $a > 0$,
— tournée vers le bas si $a < 0$.
Son sommet est le point $S(\alpha;\beta)$.
La droite d'équation $x = \alpha$ (parallèle à l'axe des ordonnées) est axe de symétrie de la parabole.

Exemple :
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 23$.
Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.
$x_S = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{10}{2} = 5$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 23 = 8$.
$y_S = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-8}{4} = -2$.
Le sommet de la parabole est le point $S(5; -2)$.



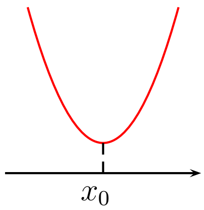
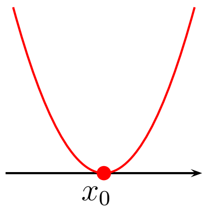
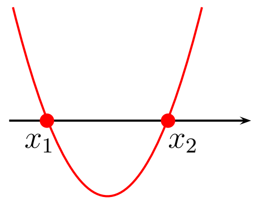
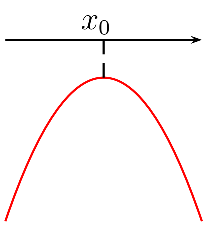
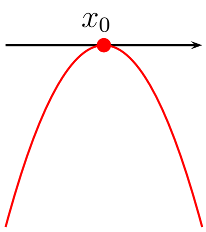
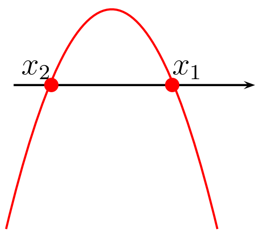
Remarque

1. On peut peut aussi trouver l'ordonnée du sommet en calculant $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
   Sur l'exemple précédent, $y_S = f(5) = 25 - 50 + 23 = -2$.

2. Dans la démonstration forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, on avait aussi démontré l'expression explicite de α et β.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

VI Synthèse

$f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac$.
Sommet de la parabole $S(\alpha;\beta)$: $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, et $\beta = f(\alpha)$ ou bien $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$.
Forme canonique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Discriminant	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Équation $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de solution dans $\mathbb{R}$	Une solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	Deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	Pas de factorisation	$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$
Allure si $a > 0$			
Allure si $a < 0$			
Signe de $ax^2 + bx + c$	Toujours du signe de a	Pour $x \neq -\dfrac{b}{2a}$, signe de a	Signe de a à l'extérieur des racines

VII Compléments

VII.1 Algorithme d'étude du trinôme $ax^2 + bx + c$

Algorithme TI-82, TI-83

```
: Prompt A,B,C
: B∧2-4AC → D
: Disp "Delta=",D
: If D>0
: Then
: Disp "Deux solutions"
: Disp (-B-√(D))/(2A)▶Frac, (-B+√(D))/(2A)▶Frac
: Else
: If D=0
: Then
: Disp "Une solution"
: Disp (-B)/(2A)▶Frac
: Else
: Disp "Pas de solution"
: End
: End
: Pause
: Disp "sommet"
: Disp -B/(2A)▶Frac, -D/(4A)▶Frac
```

On affiche de plus les coordonnées du sommet de la parabole.

Algorithme Casio

```
"A=" ?→ A
"B=" ?→ B
"C=" ?→ C
B∧2-4AC → D
"Delta="
D ◢
If D>0
Then "Deux solutions"
(-B-√(D))/(2A) ◢
(-B+√(D))/(2A)◢
Else
If D=0
Then
"Une solution"
(-B)/(2A)◢
Else "Pas de solution"
IfEnd
IfEnd
"sommet"
-B/(2A)◢
-D/(4A)◢
```

VII.2 Fonctions polynômes

Définition
Une fonction f non nulle est une fonction polynôme s'il existe un entier $n \geqslant 0$ et des réels a_0, a_1, $\dots$, a_n, avec $a_n \neq 0$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Le nombre entier n est le degré du polynôme.
Les nombres réels a_0, a_1, ..., a_n sont les coefficients du polynôme.

Remarque
La fonction nulle est une fonction polynôme. On convient que son degré est $-\infty$.

Exemple : Considérons le polynôme $P(x) = 3 - 2x^4 + 7x^8 - 3x^2$.
Son degré est ...
Le monôme en x^4 (terme de degré 4) est ...
Le terme de degré 1 est ...
Le terme constant est ...
Le coefficent de x^2 est ...

Exercice 10
Soient f et g les polynômes donnés par $g(x) = (4x^2 - 7x + 3)(2x^3 - x)$ et $h(x) = x^2(2x^2 - 4)(4x^3 - 1)$.
Sans développer, déterminer
- le degré de g :
- le degré de h :
- le terme de plus haut degré de g :
- le terme de plus haut degré de h :
- le terme de plus bas degré de g :
- le terme de plus bas degré de h :

Définition
Le nombre $a \in \mathbb{R}$ est une racine du polynôme f lorsque $f(a) = 0$.

Exercice 11
Déterminer les racines du polynôme $x^3 - 4x$.

VII.3 Identification de deux polynômes

Théorème
Deux fonctions polynômes de même degré sont égales si et seulement si leurs coefficients sont respectivement égaux.

Remarque
Deux fonctions polynômes de degré différents ne sont jamais égales.

Exercice 12
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$.
Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.

VII.4 Factorisation de polynômes

Théorème (Factorisation)
Le nombre a est racine du polynôme f si et seulement si on peut mettre $(x-a)$ en facteur dans l'expression de $f(x)$.
Alors, on a

$$f(x) = (x-a)g(x)$$

Intérêt : Si $deg(f) = n$ alors $deg(g) = n - 1$.

Exemple : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 5x + 2$
On remarque que $f(-1) = 0$. Donc on peut factoriser $f(x)$ par $(x+1)$.
Comme f est de degré 3, $f(x)$ s'écrit $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
Après identication des coefficients, on obtient $f(x) = (x+1)(4x^2 - 7x + 2)$.