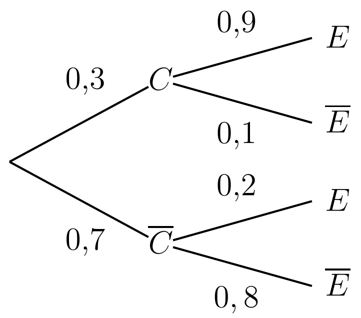
Réponses du devoir de mathématiques n° 2
Sujet 1

Exercice 1 (Questions de cours, 2 points)
Soient A et B deux événements, avec $P(B) \neq 0$.
Donner la formule définissant la probabilité de A sachant B, $P_B(A)$.
$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exercice 2 (5 points)
On donne l'arbre ci-dessous.



1. Compléter l'arbre, et donner $P(\overline{C})$ et $P_C(E)$. Sans justifier.
   On a $P(\overline{C}) = 0,7$, et $P_C(E) = 0,9$.
2. Calculer $P(C \cap E)$ et $P(\overline{C} \cap E)$.
   $P(C \cap E) = P(C) \times P_C(E) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.
   $P(\overline{C} \cap E) = P(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(E) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$.
3. En déduire que $P(E) = 0,41$.
   $P(E) = P(C \cap E) + P(\overline{C} \cap E) = 0,27 + 0,14 = 0,41$.
4. Calculer $P_E(C)$, arrondir à 0,001 près.
   $P_E(C) = \dfrac{P(E \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,27}{0,41} \approx 0,659$.
5. Calculer $P_{\overline{E}}(C)$.
   $P(\overline{E} = 1 - P(E) = 1 - 0,41 = 0,59$.
   $P_{\overline{E}}(C) = \dfrac{P(\overline{E} \cap C)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,3 \times 0,1}{0,59} \approx 0,051$.

Exercice 3 (3 points)
On considère des événements A et B tels que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,2$, et $P(A \cap B) = 0,15$.

1. Calculer $P_B(A)$.
   $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,15}{0,2} = 0,75$.
2. A et B sont-ils indépendants ? Justifer.
   $P(A) = 0,4$ et $P_B(A) = 0,75$. Donc $P(A) \neq P_B(A)$.
   A et B ne sont pas indépendants.
3. Calculer $P(A \cup B)$.
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,2 - 0,15 = 0,45$.

Exercice 4
On donne les informations suivantes sur les infirmiers (hommes ou femmes) exerçant en France, au 1er janvier 2010 :

- 516 000 infirmiers (hommes ou femmes) exercent en France.

- Ils sont répartis en trois catégories : les « infirmiers libéraux » (hommes ou femmes), les « salariés hospitaliers » (hommes ou femmes) et les « autres salariés ».
- 70 % des infirmiers (hommes ou femmes) sont des « salariés hospitaliers ».
- 77 200 sont « infirmiers libéraux » (hommes ou femmes) parmi eux, 80 % sont des femmes.
- 450 000 infirmiers sont des femmes ; parmi elles, 15 % sont dans la catégorie « autres salariés ».

1. Complétons le tableau ci-dessous

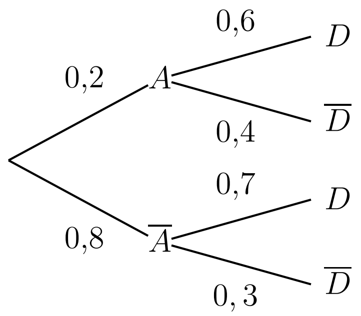
	Hommes	Femmes	Total
Infirmiers libéraux	15 440	$0{,}8\times 77\,200 =$ 61 760	77 200
Salariés hospitaliers	40 460	320 740	$0{,}7\times 516\,000 =$ 361 200
Autres salariés	10 100	$0{,}15\times 450\,000 =$ 67 500	77 600
Total	66 000	450 000	516 000

Dans les questions suivantes les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

2. On choisit au hasard une personne parmi les 516 000 infirmiers exerçant en France.
On considère les événements suivants :
A : « La personne est une femme »,
B : « La personne est "infirmier libéral" ».
L'univers est l'ensemble des infirmiers exerçant en France au premier janvier 2010.
La loi mise sur cet univers est la loi équirépartie.
La probabilité d'un événement A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.
(a) Calculons la probabilité de chacun des événements A et B.
Parmi les 516 000 infirmiers, il y a 450 000 femmes.
$P(A) = \dfrac{450\,000}{516\,000} \approx 0{,}87$.
Il y a 77 200 infirmiers libéraux.
$P(B) = \dfrac{77\,200}{516\,000} \approx 0{,}15$.
(b) L'événement $A \cap B$ est l'événement : « La personne choisie est une femme et est infirmière libérale ».
Calculons sa probabilité $P(A\cap B)$. Il y a 61 760 infirmières libérales. $P(A\cap B) = \dfrac{61\,760}{516\,000} \approx 0{,}12$.
(c) L'événement $A \cup B$ est : " La personne est une femme ou la personne est infirmier libéral".
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,87 + 0,15 - 0,12 = 0,9$.
(d) La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, est notée $P_A(B)$.
$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}87} \approx 0{,}14$.
(e) A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
Or, on a $P_A(B) = 0,14$ et $P(B) = 0,15$.
Comme $P_A(B) \neq P(B)$, les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 5 (Questions de cours, 2 points)
Soient A et B des événements, avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.
A et B sont indépendants ssi $P(A) = P_B(A)$

Exercice 6 (5 points)
On donne l'arbre ci-dessous.



1. Compléter l'arbre, et donner $P(\overline{A})$ et $P_A(D)$. Sans justifier.
   $P(\overline{A}) = 0,8$ et $P_A(D) = 0,6$.
2. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(\overline{A} \cap D)$.
   $P(A \cap D) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$.
   $P(\overline{A} \cap D) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$
3. En déduire que $P(D) = 0,68$.
   $P(D) = P(A \cap D) + P(\overline{A} \cap D) = 0,12 + 0,56 = 0,68$.
4. Calculer $P_D(A)$, arrondir à 0,001 près.
   $P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D}{P(D)} = \dfrac{0,12}{0,68} \approx 0,176$.
5. Calculer $P_{\overline{D}}(A)$.
   $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,68 = 0,32$.
   $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,2 \times 0,4}{0,32} = 0,25$

Exercice 7 (3 points)
On considère des événements A et B tels que $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,2$, et $P(A \cap B) = 0,1$.

1. Calculer $P_A(B)$.
   $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,7} = \dfrac{1}{7}$.
2. A et B sont-ils indépendants ? Justifer.
   $P(B) = 0,2$, et $P_A(B) = \dfrac{1}{7} \approx 0,14$.
   Donc $P(B) \neq P_A(B)$, A et B ne sont pas indépendants.
3. Calculer $P(A \cup B)$.
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\cap B) = 0,7 + 0,2 - 0,1 = 0,8$.

Exercice 8
On donne les informations suivantes sur les infirmiers (hommes ou femmes) exerçant en France, au 1$^{\text{er}}$ janvier 2010 :

- 645 000 infirmiers (hommes ou femmes) exercent en France.
- Ils sont répartis en trois catégories : les « infirmiers libéraux » (hommes ou femmes), les « salariés hospitaliers » (hommes ou femmes) et les « autres salariés ».
- 70 % des infirmiers (hommes ou femmes) sont des « salariés hospitaliers ».
- 77 200 sont « infirmiers libéraux » (hommes ou femmes) parmi eux, 80 % sont des femmes.

- 450 000 infirmiers sont des femmes ; parmi elles, 15 % sont dans la catégorie « autres salariés ».

1. Complétons le tableau ci-dessous

	Hommes	Femmes	Total
Infirmiers libéraux	15 440	$0{,}8\times 77\,200 =$ 61 760	77 200
Salariés hospitaliers	130 760	320 740	$0{,}7\times 645\,000 =$ 451 500
Autres salariés	48 800	$0{,}15\times 450\,000 =$ 67 500	116 300
Total	195 000	450 000	645 000

Dans les questions suivantes les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

2. On choisit au hasard une personne parmi les 516 000 infirmiers exerçant en France. On considère les événements suivants :
   A : « La personne est une femme »,
   B : « La personne est "infirmier libéral" ».
   L'univers est l'ensemble des infirmiers exerçant en France au premier janvier 2010. La loi mise sur cet univers est la loi équirépartie.
   La probabilité d'un événement A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de l'univers}}$.
   (a) Calculons la probabilité de chacun des événements A et B.
   Parmi les 645 000 infirmiers, il y a 450 000 femmes.
   $P(A) = \dfrac{450\,000}{645\,000} \approx 0{,}70.$
   Il y a 77 200 infirmiers libéraux.
   $P(B) = \dfrac{77\,200}{645\,000} \approx 0{,}12.$
   (b) L'événement $A \cap B$ est l'événement : « La personne choisie est une femme et est infirmière libérale ».
   Calculons sa probabilité $P(A\cap B)$. Il y a 61 760 infirmières libérales. $P(A\cap B) = \dfrac{61\,760}{645\,000} \approx 0{,}10.$
   (c) L'événement $A \cup B$ est : " La personne est une femme ou la personne est infirmier libéral".
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7 + 0,12 - 0,10 = 0,72.$
   (d) La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé, est notée $P_A(B)$.
   $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}7} \approx 0{,}14.$
   (e) A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.
   Or, on a $P_A(B) \approx 0,14$ et $P(B) = 0,12$.
   Comme $P_A(B) \neq P(B)$, les événements A et B ne sont pas indépendants.