Première S

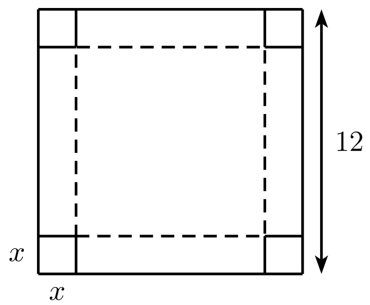
Exercices supplémentaires pour le contrôle commun en 1re S

Exercice 1
Une suite arithmético-géométrique.

Exercice 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.
2. Étudier les variations de f et donner son tableau de variation.
3. (a) Calculer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (b) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$.
4. Donner deux nombres m et M tels que pour tout réel x de $[-4;4]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Justifier votre réponse.

Exercice 3
Dans un morceau de carton carré de 12 cm de côté, on découpe dans chaque coin des carrés de x cm de côté.
En relevant les bords (on plie suivant les pointillés sur la figure), on construit une boîte sans couvercle avec la feuille ainsi découpée.



1. Expliquer pourquoi les valeurs possibles de x appartiennent à l'intervalle $[0;6]$.
2. Montrer que le volume de la boîte $V(x)$ a pour expression $V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
3. Déterminer le volume maximal de la boîte. Justifier.

Exercice 4 (Équations trigo)
1. Résoudre dans $[0;2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Résoudre dans $[-\pi;2\pi]$ l'équation $2\sin^2 x - \sin x = 0$.

Exercice 5 (Probabilites)
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.
Une urne comprend 5 boules rouges et $n-5$ boules noires.

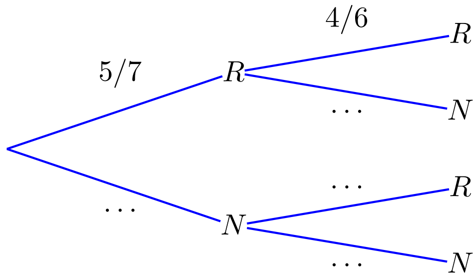
Partie A[à enlever à mon avis]
Un joueur tire au hasard, successivement et **avec remise** deux boules de l'urne.

1. Soit A l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(A)$ de l'événement A.
2. En étudiant les variations de la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{10(x-5)}{x^2}$, déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n le joueur a le plus de chances de réaliser A.

Partie B
Un joueur tire au hasard, successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.
On note B l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
On note $p_n(B)$ la probabilité de l'événement B.

1. Étude du cas particulier $n = 7$.
   Pour cette question, l'urne contient donc 5 boules rouges et 2 boules noires.

(a) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



(b) En déduire la probabilité $P_7(B)$ de l'événement B.

2. Cas général et variable aléatoire.
   On suppose que n est un entier, $n \geqslant 6$.

   (a) En s'aidant d'un arbre, exprimer $P_n(B)$ en fonction de n.

   (b) Le joueurs gagne 2 euros s'il réalise B et perd 1 euro dans le cas contraire.
   Soit X le gain algébrique du joueur.
   Montrer que $E(X) = \dfrac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n}$.

   (c) Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.

Correction de certains exercices

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par quotient, et car le dénominateur ne s'annule pas) et on a :
   $f'(x) = \dfrac{4(x^2+4) - 2x \times 4x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4x^2+16}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2}$.

2. Étudier les variations de f et donner son tableau de variation.
   Pour tout réel x, $(x^2+4)^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-4(x-2)(x+2)$.
   $-4(x-2)(x+2)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -2 et 2 et dont le coefficient de x^2 est négatif, on en déduit son signe :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-4(x-2)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Puis le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	

3. (a) Calculer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.
   On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{16}{16} = 1$, donc une équation de $\mathcal{T}$ est $y = x$.

   (b) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{T}$. our tout réel x, on a
   $f(x) - x = \dfrac{4x}{x^2+4} - \dfrac{x(x^2+4)}{x^2+4} = \dfrac{4x - x(x^2+4)}{x^2+4} = \dfrac{-x^3}{x^2+4}$.
   Pour tout réel x, $x^2+4 > 0$, donc $f(x) - x$ a le même signe que $-x^3$, donc :
   - Pour tout x de $]-\infty; 0[$, $f(x) - x > 0$, c'est à dire $f(x) > x$, donc $\mathcal{C}$ est au dessus de $\mathcal{T}$
   - Pour tout x de $]0; +\infty; [$, $f(x) - x < 0$, c'est à dire $f(x) < x$, donc $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{T}$

4. Donner deux nombres m et M tels que pour tout réel x de $[-4; 4]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Justifier votre réponse.
   Sur $[-4; 4]$, le tableau de variation de f est :

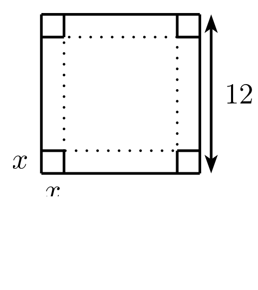
x	-4		-2		2		4
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de f	$-\frac{4}{5}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{4}{5}$

   On en déduit que pour tout x de $[-4; 4]$, on a : $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$

Exercice 7 (3.5 points)

Dans un morceau de carton carré de 12 cm de côté, on découpe dans chaque coin des carrés de x cm de côté.

En relevant les bords, on construit une boîte sans couvercle avec la feuille ainsi découpée.



1. Expliquer pourquoi les valeurs possibles de x appartiennent à l'intervalle $[0; 6]$.
   D'après le contexte, x est une longueur, donc $x \geqslant 0$.
   De plus, comme le côté du carré mesure 12, on a $2x \leqslant 12$ donc $x \leqslant 6$.
   Ainsi, $x \in [0; 6]$.
2. Exprimer le volume de la boîte $V(x)$ en fonction de x.
   La boîte a une base carrée de côté $12 - 2x$ et une hauteur de x.
   $V(x) = \text{Aire(base)} \times \text{hauteur} = (12 - 2x)^2 \times x$.
3. Déterminer le volume maximal de la boîte. Justifier.
   $V(x) = (144 - 48x + 4x^2) \times x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
   La fonction V est dérivable sur $[0; 6]$, car c'est une fonction polynôme.
   $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12)$.
   Comme $12 > 0$, V' a le même signe que le trinôme $x^2 - 8x + 12$.
   $\Delta = 16 > 0$, et l'on trouve pour racines 2 et 6.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines.

x	0		2		6
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

   $V(2) = 128$.

   $\boxed{\text{Le volume est donc maximal lorsque } x = 2 \text{ cm, et ce volume maximal est de } 128 \text{ cm}^3.}$

Exercice 8

1. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On a $2x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $2x = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   Donc, dans $\mathbb{R}$, les solutions sont les réels de la forme $\dfrac{\pi}{8} + k\pi$ et $-\dfrac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   $\boxed{\text{Dans } [0; 2\pi[,\ S = \left\{\dfrac{\pi}{8}; \dfrac{9\pi}{8}; \dfrac{7\pi}{8}; \dfrac{15\pi}{8}\right\}.}$
2. Résoudre dans $[-\pi; 2\pi]$ l'équation $2\sin^2 x - \sin x = 0$.
   L'expression se factorise pour donner l'équation $(\sin x)(2\sin x - 1) = 0$.
   D'où $\sin x = 0$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$.
   Dans $\mathbb{R}$, on a donc $x = 0 + k\pi$, ou $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   $\boxed{\text{Dans } [-\pi; 2\pi],\ S = \left\{-\pi; 0; \pi; 2\pi; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6};\right\}.}$

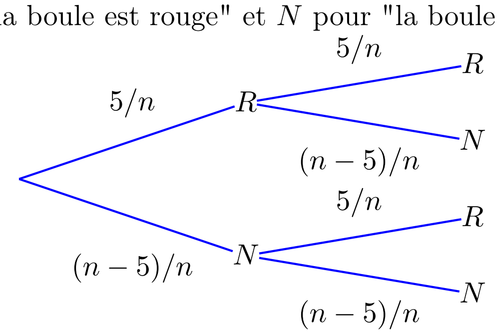
Exercice 9

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5.
Une urne comprend 5 boules rouges et $n - 5$ boules noires.

Partie A

Un joueur tire au hasard, successivement et **avec remise** deux boules de l'urne.

1. Soit A l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
   En s'aidant d'un arbre, calculer la probabilité $p_n(A)$ de l'événement A.
   On note R pour désigner "la boule est rouge" et N pour "la boule est noire". ($\overline{R} = N$).



$$\boxed{p_n(A) = p(R;N) + p(N;R) = 2 \times \frac{5}{n} \times \frac{n-5}{n} = \frac{10(n-5)}{n^2}.}$$

2. En étudiant les variations de la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{10(x-5)}{x^2}$, déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n le joueur a le plus de chances de réaliser A.
   Sur $[5;+\infty[$, x^2 ne s'annule pas.
   La fonction f est donc dérivable sur $[5;+\infty[$ par quotient de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \geqslant 5$, $f'(x) = 10 \times \dfrac{x^2-(x-5)\times 2x}{x^4} = 10 \times \dfrac{-x^2+10x}{x^4} = 10 \times \dfrac{x(10-x)}{x^4}$.
   $10 > 0$, et sur $[5;+\infty[$ $x > 0$ et $x^4 > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $(10-x)$.

x	5		10		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	

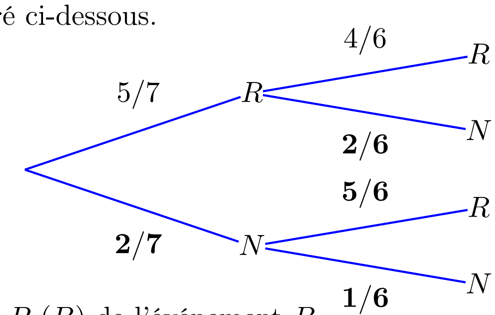
   $f(5) = 0$, et $f(10) = \dfrac{10\times 5}{10^2} = \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit que la probabilité $p_n(A)$ est maximale lorsqu'il y a 10 boules dans l'urne (5 rouges et 5 noires).
   Dans ce cas, la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est $p_{10}(A) = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

Un joueur tire au hasard, successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.
On note B l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».
On note $p_n(B)$ la probabilité de l'événement B.

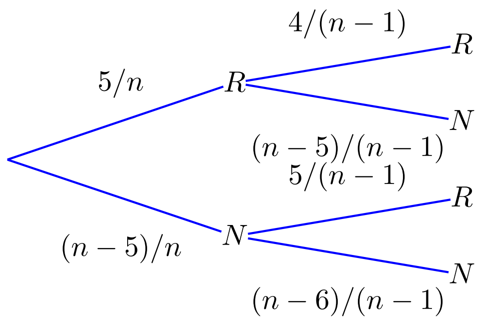
1. Étude du cas particulier $n = 7$.
   Pour cette question, l'urne contient donc 5 boules rouges et 2 boules noires.
   (a) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   (b) En déduire la probabilité $P_7(B)$ de l'événement B.

$$\boxed{p_7(B) = p(R;N) + p(N;R) = \frac{5}{7}\times\frac{2}{6} + \frac{2}{7}\times\frac{5}{6} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}.}$$

2. Cas général et variable aléatoire.
   On suppose que n est un entier, $n \geqslant 6$.
   (a) En s'aidant d'un arbre, exprimer $P_n(B)$ en fonction de n.
   Pour $n \geqslant 6$, on a l'arbre suivant :



$$\boxed{p_n(B) = p(R;N) + p(N;R) = \frac{5}{n}\times\frac{n-5}{n-1} + \frac{n-5}{n}\times\frac{5}{n-1} = \frac{10(n-5)}{n(n-1)}.}$$

(b) Le joueurs gagne 2 euros s'il réalise B et perd 1 euro dans le cas contraire.
Soit X le gain algébrique du joueur.
Montrer que $E(X) = \dfrac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n}$.
La loi de probabilité de X est résumée par le tableau :

x_i	2	-1
$p(X = x_i)$	$\dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$	$1 - \dfrac{10(n-5)}{n(n-1)}$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum x_i \times p_i \\
&= 2 \times \frac{10(n-5)}{n(n-1)} - 1 \times \left(1 - \frac{10(n-5)}{n(n-1)}\right) \\
&= 3 \times \frac{10(n-5)}{n(n-1)} - 1 \\
&= \frac{30(n-5) - n(n-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{-n^2 + 31n - 150}{n^2 - n}
\end{aligned}$$

(c) Déterminer la composition de l'urne pour que le jeu soit équitable.
Le jeu est équitable ssi $E(X) = 0$ ssi $-n^2 + 31n - 150 = 0$.
On résout l'équation du second degré $-x^2 + 31x - 150 = 0$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 31^2 - 4 \times 150 = 361 = 19^2 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 25$.
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 6$.
On obtient deux solutions entières et supérieures ou égales à 6 (on garde les deux).
Le jeu est équitable pour $n = 6$ (5 rouges, 1 noire) et pour $n = 25$ (5 rouges, 20 noires).