Correction du contrôle n° 2

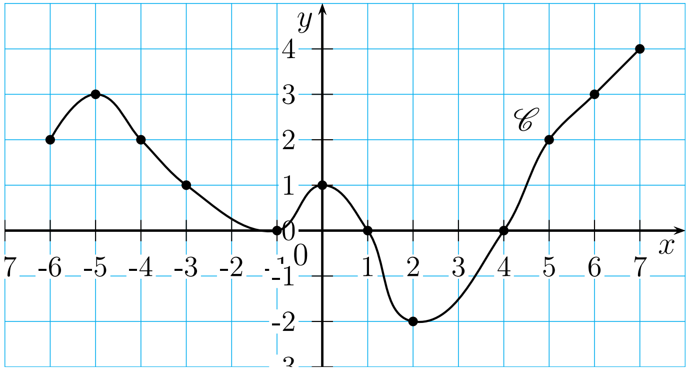
Sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

1. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition d'un antécédent de y par f.
   On appelle antécédent de y par f tout réel x de D tel que $f(x) = y$.
2. Rappeler les identités remarquables.
   Pour tous réels a et b, on a :
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
   $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exercice 2 (6 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
   L'ensemble de définition de f est $[-6;7]$.
2. Lire graphiquement l'image par f de chacun des réels suivants : -1 ; 0 ; 2 ; 5.
   $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = -2$, et $f(5) = 2$.
3. Donner les antécédents de 2 par f. On ne demande pas de justifier.
   Les antécédents de 2 par f sont -6 ; -4 et 5.
4. Rechercher les antécédents de -3 par f.
   -3 n'a pas d'antécédent par f.
5. Quel est l'ensemble des valeurs prises par f ?
   L'ensemble des valeurs prises par la fonction f est $[-2;4]$.
6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   (a) « Pour tout $x \in [-3;4]$, $f(x) \geqslant 0$. »
   Faux. Contre-exemple avec $x = 2 \in [-3;4]$, et $f(2) = -2 < 0$.
   (b) « Il existe au moins un nombre réel k qui ait un seul antécédent par f. »
   Vrai : prenons $k = 4$. 4 admet un seul antécédent par f.

Exercice 3 (7 points)

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 4$ et $g(x) = 3x^2 - x + 1$.
On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère. On ne demande pas de les tracer.

1. Calculer les images par f et g des nombres suivants : -1 ; $\sqrt{5}$; $\dfrac{1}{2}$.
   $f(-1) = -(-1) + 4 = 1 + 4 = 5$.
   $f(\sqrt{5}) = -\sqrt{5} + 4$.
   $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} + 4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{8}{2} = \dfrac{7}{2}$.
   $g(-1) = 3 \times (-1)^2 - (-1) + 1 = 3 \times 1 + 1 + 1 = 5$.
   $g(\sqrt{5}) = 3 \times \sqrt{5}^2 - \sqrt{5} + 1 = 3 \times 5 - \sqrt{5} + 1 = 16 - \sqrt{5}$.
   $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{4} = \dfrac{5}{4}$.
2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) La courbe $\mathscr{C}_f$ de f passe par le point $A(0;4)$.
   Vrai. $f(0) = -0 + 4 = 4$. $A(0;4) \in \mathscr{C}_f$.
   (b) 6 est un antécédent de -2 par f.
   Vrai. $f(6) = -6 + 4 = -2$.

(c) L'image de $\sqrt{2}+1$ par la fonction g est 0.
Faux.

$$\begin{array}{rcl} g(\sqrt{2}+1) & = & 3\times(\sqrt{2}+1)^2-(\sqrt{2}+1)+1 \\ & = & 3(2+2\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}-1+1 \\ & = & 5\sqrt{2}+9 \\ & \neq & 0 \end{array}$$

Donc $\sqrt{2}+1$ n'est pas un antécédent de 0 par la fonction g.

(d) Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses -1 et 1.
Vrai.
On a déjà vu que $f(-1)=g(-1)=5$.
$f(1)=-1+4=3$, et $g(1)=3-1+1=3$.

On a bien $f(1)=g(1)$, et $f(-1)=g(-1)$.
Donc les courbes de f et de g se coupent aux points d'abscisses respectives -1 et 1.

3. Déterminer par le calcul les antécédents de 1 par g.
On résout $g(x)=1$, soit $3x^2-x+1=1$.
$3x^2-x=0$, en factorisant, on a $x(3x-1)=0$,
d'où $x=0$ ou $3x-1=0$.
$x=0$ ou $x=\frac{1}{3}$.

Les antécédents de 1 par g sont 0 et $\frac{1}{3}$.

Exercice 4 (5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Développer et réduire l'expression $(2x+5)^2-3(x+1)(x-5)$.

$$\begin{array}{rcl} (2x+5)^2-3(x+1)(x-5) & = & 4x^2+20x+25-(3x+3)(x-5) \\ & = & 4x^2+20x+25-3x^2+15x-3x+15 \\ & = & x^2+32x+40 \end{array}$$

2. Résoudre l'équation $\frac{x-5}{4}=2x+\frac{1}{2}$.
$x-5=8x+2$, d'où $x=-1$.

3. Résoudre l'équation $(3x-4)(6-x)=0$.
$3x+4=0$ ou $6-x=0$, d'où $x=-\frac{4}{3}$ ou $x=6$.
Les solutions sont $-\frac{4}{3}$ et 6.

4. Soit $A(x)=(3x-1)^2-49$.

(a) Factoriser $A(x)$.

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & (3x-1)^2-49 \\ & = & (3x-1)^2-7^2 \\ & = & (3x-1-7)(3x-1+7) \\ & = & (3x-8)(3x+6) \end{array}$$

(b) Résoudre l'équation $A(x)=0$.

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & 0 \\ (3x-8)(3x+6) & = & 0 \end{array}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Donc

$$\begin{array}{ccc} 3x-8=0 & \textit{ou} & 3x+6=0 \\ x=\frac{8}{3} & \textit{ou} & x=\frac{-6}{3}=-2 \end{array}$$

Les solutions sont $\frac{8}{3}$ et -2.

Exercice 5 (Bonus, 2 points)

On traitera, au choix, une seule des deux questions suivantes :

1. Trouver tous les nombres réels x et y tels que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.
Comme $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, et $x - y = 11$, on obtient $(x+y) \times 11 = 77$, donc $x + y = 7$.
De plus, $x - y = 11$, d'où, en additonnant ces deux équations, $2x = 18$, et donc $x = 9$.
Enfin, il vient $y = -2$.
On vérifie facilement que ce couple $(9; -2)$ convient, et c'est donc la seule solution.

2. Le nombre $1+\sqrt{5}$ est-il solution de l'équation $x^3-x^2-6x-4 = 0$?
$(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$.
Donc $(1+\sqrt{5})^3 = (6+2\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 6 + 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2 \times 5 = 16 + 8\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} f(1+\sqrt{5}) &= (1+\sqrt{5})^3 - (1+\sqrt{5})^2 - 6(1+\sqrt{5}) - 4 \\ &= 16 + 8\sqrt{5} - (6+2\sqrt{5}) - 6 - 6\sqrt{5} - 4 \\ &= 16 - 6 - 6 - 4 + 8\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 6\sqrt{5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'affirmation est vraie.

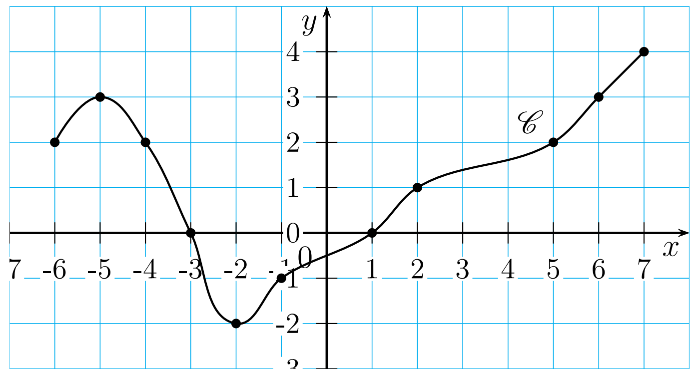
Réponses du sujet 2 (non détaillées)

Exercice 6 (cours, 2 points)

1. Compléter.
On se place dans un repère du plan. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$. La courbe représentative de f est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ où $x \in D$.
2. Rappeler la propriété relative à un produit de facteurs égal à 0.
Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.

Exercice 7 (5 points)

On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.



1. Donner l'ensemble de définition de f.
$[-6; 7]$.
2. Lire graphiquement l'image par f de chacun des réels suivants : -5 ; -3 ; 2 ; 5.
$f(-5) = 3$, $f(-3) = 0$, $f(2) = 1$, et $f(5) = 2$.
3. Donner les antécédents de 2 par f. On ne demande pas de justifier.
Les antécédents de par f sont -6, -4 et 5.
4. Rechercher les antécédents de 5 par f.
5 n'a pas d'antcédents.
5. Quel est l'ensemble des valeurs prises par f ? L'ennsemble des valeurs prises par f est $[-2; 4]$.
6. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   (a) « Pour tout $x \in [-6; 1]$, $f(x) \leqslant 0$. »
   Faux : pour $x = -4$, on a $f(-4) = 2 > 0$.
   (b) « Il existe au moins un nombre réel k qui ait un seul antécédent par f. »
   Vrai : -2 a un seul antécédent.

Exercice 8 (7 points)

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 7$ et $g(x) = 2x^2 - 5x + 1$.
On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère.

1. Calculer les images par f et g des nombres suivants : -1 ; $\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}$. $f(-1) = 8$, $g(-1) = 8$.
   $f(\sqrt{2}) = 7 - \sqrt{2}$, et $g(\sqrt{2}) = 5 - 5\sqrt{2}$.
   $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.
2. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   (a) La courbe $\mathscr{C}_f$ de f passe par le point $A(0;4)$.
   $f(0) = 7 \neq 4$. Faux.
   (b) 6 est un antécédent de -2 par f.
   $f(6) = -6 + 7 = 1 \neq -2$. Faux.
   (c) Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points d'abscisses -1 et 3.
   On sait que $f(-1) = g(-1)$.
   $f(3) = 4$, et $g(3) = 4$, donc $f(3) = g(3)$. Vrai.
3. Déterminer par le calcul les antécédents de 1 par g.
   $g(x) = 1$ ssi $2x^2 - 5x = 0$ ssi $x(2x - 5) = 0$ ssi $(x = 0$ ou $x = 2,5)$.

Exercice 9 (5 points)
Les questions sont indépendantes.

1. Développer et réduire l'expression $(2x-5)^2 - 3(x+7)(x-5)$.
   On obtient $x^2 - 26x + 130$.
2. Résoudre l'équation $\dfrac{x-3}{4} = 2x + \dfrac{7}{2}$.
   $x - 3 = 8x + 14$, $x = -\dfrac{17}{7}$.
3. Résoudre l'équation $(6x - 11)(3 - x) = 0$.
   Les solutions sont $\dfrac{11}{6}$ et 3.
4. Soit $A(x) = (8x+3)^2 - 100$.
   (a) Factoriser $A(x)$.
   $A(x) = (8x + 13)(8x - 7)$.
   (b) Résoudre l'équation $A(x) = 0$.
   Les solutions sont $-\dfrac{13}{8}$ et $\dfrac{7}{8}$.

Exercice 10 (Bonus, 2 points)
On traitera, au choix, une seule des deux questions suivantes :

1. Trouver tous les nombres réels x et y tels que $x^2 - y^2 = 77$ et $x - y = 11$.
2. Le nombre $1+\sqrt{5}$ est-il solution de l'équation $x^3 - x^2 - 6x - 4 = 0$?