Chapitre 3 : Puissances et racines carrées

I Puissances entières relatives

Définition
Soient a un nombre réel et n un entier naturel.
On pose $a^0 = 1$ (a non nul), et $a^1 = a$.
Pour tout $n \geqslant 2$, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fois}}$, (lire "$a$ puissance n")
Lorsque $a \neq 0$, et $n \geqslant 1$, a^{-n} est l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Exercice 1 (calcul mental)
Calculer à l'aide de la définition :

1. $(-5)^0 =$ $\qquad$ $1,4^1 =$ $\qquad$ $2^5 =$
2. $(\sqrt{3})^4 =$ $\qquad$ $5^{-1} =$ $\qquad$ $(-2)^3 =$
3. $10^{-4} =$ $\qquad$ $2^{-3} =$ $\qquad$ $(\sqrt{2})^{-4} =$

Propriété
Soient a un nombre réel non nul et n et p des entiers relatifs.

1. $a^n \times a^p = a^{n+p}$
2. $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
3. $(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemple :
$3^8 \times 3^4 =$
$\dfrac{5^4}{5^6} =$
$\left(\sqrt{2}^3\right)^2 =$

Propriété
Soient a et b des nombres réels non nuls et n un entier relatif.
Alors $a^n \times b^n = (ab)^n$ et $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

Exemple :
$\dfrac{205^{-3}}{20,5^{-3}} =$

Définition
L'écriture scientifique d'un nombre décimal positif est $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule ($1 \leqslant a < 10$), et n est un entier relatif (positif ou négatif).

Exemple : donner l'écriture scientifique des nombres suivants.
$5\,430\,000 = \ldots$ $\qquad$ $0.062\,3 = \ldots$

II Racines carrées

Définition
Soit a un nombre réel positif ou nul.
La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est le nombre réel positif dont le carré est a.
Ainsi, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{a}^2 = a$.

Exemple :

$\sqrt{9} =$ $\qquad$ $\sqrt{0} =$ $\qquad$ $\sqrt{1} =$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{1}{4}} =$

Propriété
Soient a et b des nombres réels positifs ou nuls.

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
2. Si de plus $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration
D'une part, $(\sqrt{a \times b})^2 =$
D'autre part, $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 =$
...
...

Exercice 2 (simplification de racines carrées)
Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

1. $a = \sqrt{8}$, $b = \sqrt{75}$, $c = \sqrt{12}$
2. $d = \sqrt{20}$, $e = \sqrt{48}$, $f = \sqrt{27}$
3. $g = \sqrt{72}$, $h = \sqrt{18}$, $i = \sqrt{24}$

Remarque
Attention, de façon générale, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
Par exemple, prenons $a = 9$ et $b = 16$.
$\sqrt{a+b} = \sqrt{25} = 5$, tandis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 3 + 4 = 7$.

Propriété
Pour tous nombres a et b strictement positifs, on a $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration
Posons $C = \sqrt{a+b}$ et $D = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
$C^2 = \sqrt{a+b}^2 = a + b$.
Par ailleurs, $D^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = \sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$.
Or, $2\sqrt{ab} > 0$.
On a donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > \sqrt{a+b}^2$, soit $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 > 0$.
$D^2 - C^2 > 0$, soit $(D - C)(D + C) > 0$.
Or, il est clair que $C > 0$ et $D > 0$, donc $D + C > 0$.
D'après la règles des signes, $D - C > 0$, soit $D > C$.
Ainsi, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. $\square$

Propriété
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue de a).

Rappel : $|a| = a$ si $a \geqslant 0$, et $|a| = -a$ si $a < 0$.

Démonstration
Si $a \geqslant 0$, $\sqrt{a^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$.
Si $a < 0$, alors $(-a) > 0$, et $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a) \times (-a)} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$.
On retrouve bien la valeur absolue de a dans tous les cas. □

Exercice 3 (quantité conjuguée)

1. Vérifier que $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)$ est un nombre entier.
2. En déduire l'écriture sans radical au dénominateur de $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$.
3. Écrire sans radical au dénominateur les nombres suivants :
   $B = \dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$ $\qquad C = \dfrac{5}{2-\sqrt{3}}$ $\qquad D = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.