Chapitre 6 : Probabilité conditionnelle. Indépendance.

I Introduction

Activité 1
On répertorie les élèves d'un conservatoire dans le tableau suivant :

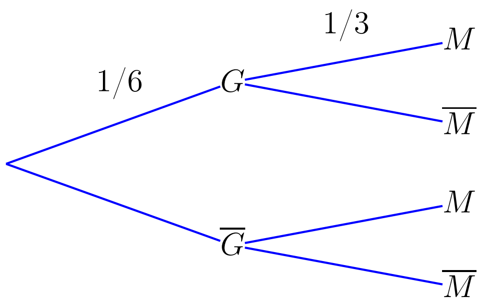
	Violon	Autre instrument	Total
Filles	18	42	
Garçons	12	28	
Total			

On choisit au hasard un élève de ce conservatoire et on considère les évènements suivants :
F : « L'élève est une fille » et V : « L'élève étudie le violon ».

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Donner $P(V)$ et $P(F)$.
3. Exprimer l'évènement $F \cap V$ par une phrase et calculer sa probabilité.
4. On choisit une fille au hasard. Déterminer la probabilité qu'elle étudie le violon. Cette probabilité s'appelle la probabilité de V sachant F et se note $P_F(V)$.
5. On choisit maintenant un élève étudiant le violon.
   (a) Déterminer la probabilité que ce soit une fille.
   (b) Indiquer comment se note cet évènement.

Activité 2
Le petit chaperon rouge hésite entre le chemin de gauche et le chemin de droite. Elle lance alors un dé à six faces et décide de prendre le chemin de gauche si elle obtient un six. Le loup arrive peu après et hésite lui aussi. Il lance alors le dé à six faces et décide de prendre le chemin de gauche s'il obtient un cinq ou un six.
On note G l'évènement « Le petit chaperon rouge a pris le chemin de gauche » et M l'évènement « le loup a pris le même chemin ».

1. Calculer $P(G)$.
2. Calculer $P_G(M)$.
3. Compléter l'arbre ci-contre en indiquant les probabilités manquantes :



4. (a) Déterminer la probabilité qu'ils se retrouvent tous les deux sur le chemin de gauche.
   (b) Indiquer comment se note cet évènement.
5. (a) Déterminer la probabilité qu'ils se retrouvent tous les deux sur le chemin de droite.
   (b) Indiquer comment se note cet évènement.

II Probabilité conditionnelle

Définition
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.
La probabilité de B sachant A , notée $P_A(B)$, est donnée par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

C'est la probabilité que B soit réalisé quand on sait que A l'est.

Lorsqu'on calcule $P_A(B)$, l'ensemble de référence devient A.
Les probabilités conditionnelles vérifient les propriétés des probabilités. En particulier,

Propriété
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

1. $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.
2. $P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1$.
3. S'il y a équiprobabilité sur Ω, $P_A(B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.
   La notation $\text{Card}(A)$ signifie le cardinal de A (nombre l'éléments de A).

Exercice 1
On considère 10 boules numérotées ainsi :
- 4 boules rouges : 2 portant le numéro 1 et 2 portant le numéro 2
- 6 boules vertes : 4 portant le numéro 1 et 2 portant le numéro 2.

On prend une boule au hasard et on s'intéresse aux évènements suivants :
R :« La boule tirée est rouge »et N : « La boule tirée porte le numéro 1 ».
Calculer les probabilités suivantes : $P_R(N)$ et $P_N(R)$.

Propriété
Soient A et B deux événements, avec $P(A) \neq 0$. Alors,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Exercice 2
Les données sont celles du tableau de probabilités ci-dessous où A et B sont deux événements d'une expérience alétoire.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,32		
$\overline{B}$		0,2	0,36
Total			

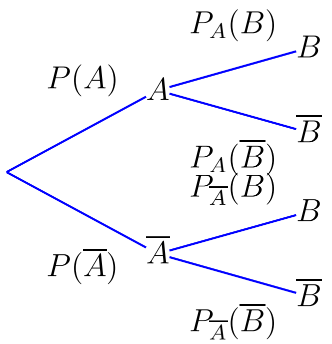
Déterminer : $P(\overline{B})$; $P(A)$; $P(A \cap B)$; $P_A(B)$; $P(A \cup B)$, et $P_{\overline{B}}(A)$.

III Arbre de probabilité

Certaines situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles peuvent être représentées par des arbres pondérés.
On place les événements aux bouts des branches, et les probabilités sur les branches. Un chemin est une suite de branches. Il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

Exemple :

1^{er} niveau $2^{ème}$ niveau



Événement (chemin)	Probabilité
$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$A \cap \overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$
$\overline{A} \cap B$	$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$
$\overline{A} \cap \overline{B}$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

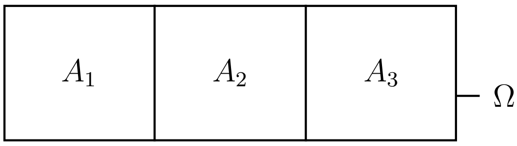
Propriété
1. La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est 1.
2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur les branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

Exercice 3
Un sac contient sept bonbons. Trois d'entre eux sont à la fraise et les autres sont à la menthe. On en prend un au hasard que l'on mange aussitôt, puis on en reprend un deuxième. On considère les évènements suivants : U :« Le 1er bonbon est à la fraise » et D : « Le 2ème bonbon est à la fraise ».
1. Calculer $P(U)$.
2. Calculer $P_U(D)$.
3. Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
4. Calculer $P(U \cap D)$.
5. Calculer la probabilité de prendre deux bonbons ayant le même goût.

IV Formule des probabilités totales

Définition
Soient A_1, A_2, ..., A_n des événements de probabilités non nulles d'un univers Ω.
On dit que A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de Ω lorsque leur réunion est Ω et qu'ils sont tous deux à deux disjoints.

Cela revient à dire que si A_1,..., A_n forme une partition, quelle que soit l'issue considérée, elle se trouve dans un seul évènement A_i de la famille.
Exemple :

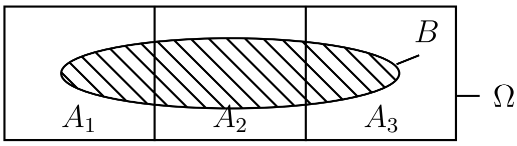


A_1, A_2, A_3 forment une partition de l'univers Ω.

Remarque
Soit A un événement tel que $P(A) \in]0;1[$. Alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

Propriété (formule des probabilités totales)
Soit A_1, A_2, …, A_n une partition de Ω.
Alors, pour tout événement B,

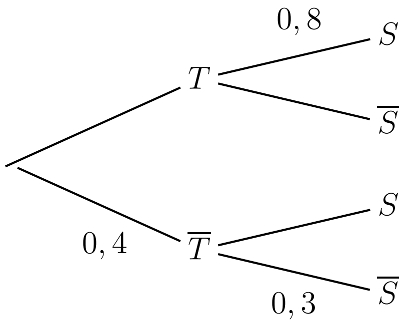
$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) \\ &= P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B) \end{aligned}$$



Remarque
Soit A un événement tel que $P(A) \in]0;1[$. Alors A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
Dans ce cas, la formule des probabilités totales s'écrit :
Pour tout événement B,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \end{aligned}$$

Exercice 4
On a représenté une expérience aléatoire par l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Donner sans justification les probabilités suivantes : $P(T)$; $P_{\overline{T}}(\overline{S})$; $P_{\overline{T}}(S)$
2. Montrer que $P(S) = 0,76$.
3. Déterminer, en justifiant, la probabilité conditionnelle $P_S(T)$.

V Indépendance

Définition
Soient A et B deux événements de probabilités non nulles ($P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$).
On dit que A et B sont indépendants lorsque $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Remarque

1. Lorsque $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$, on dit que A et B sont indépendants.
2. Dire que deux événements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur la probabilité de l'autre : $P_B(A) = P(A)$ ou $P_A(B) = P(B)$.

Exercice 5

Dans un club sportif, chaque membre ne pratique qu'un seul sport. La répartition est donnée par le tableau suivant.

	Boxe	Tennis	Gymnastique	Total
Femmes	60	230	160	450
Hommes	160	310	80	550
Total	220	540	240	1 000

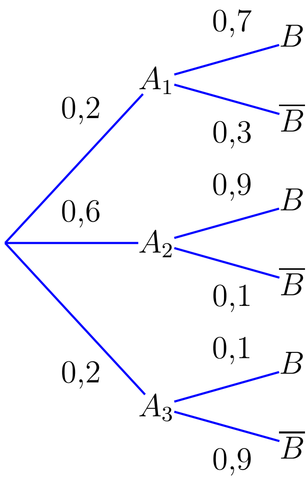
On choisit au hasard un membre du club, chaque membre a la même probabilité d'être choisi. On note

— F : "la personne choisie est une femme",
— T : "la personne choisie joue au tennis".

Les événements F et T sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 6

On donne l'arbre pondéré suivant.



1. Montrer que A_1 et B sont indépendants.
2. Les événements A_2 et B sont-ils indépendants ?
3. Les événements A_3 et B sont-ils indépendants ?

Exercice 7

Une salle de sport ouvre dans une commune composée de 9000 femmes et 6000 hommes. Un sondage montre que 40% des femmes sont prêtes à prendre un abonnement, contre seulement 15% des hommes. On rencontre au hasard un habitant de la commune. On note :

— F : "la personne est une femme",
— H : "la personne est un homme",
— A : " le personne est prête à prendre un abonnement".

1. Montrer que $P(F) = 0,6$.
2. Contruire un arbre pondéré représentant la situation.
3. Traduite par une phrase l'évènement $F \cap A$, puis calculer sa probabilité.
4. Calculer la probabilité que la personne soit un homme prêt à prendre un abonnement.
5. Pauline trouve un papier de sondage d'un habitant indiquant "je ne veux pas m'abonner". Déterminer la probabilité que l'écriture soit celle d'une femme.