Correction du devoir maison n° 10

Exercice 1 (133 page 133)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 900$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,6u_n + 200$.

1. Calculons u_1 et u_2.
   $u_1 = 0,6u_0 + 200 = 0,6 \times 900 + 200 = 740$.
   $u_2 = 0,6u_1 + 200 = 0,6 \times 740 + 200 = 644$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 500$.
   (a) Montrons que la suite (v_n) est géométrique.
   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 0,6u_n + 200 - 500 = 0,6u_n - 300 = 0,6(v_n + 500) - 300$
   $v_{n+1} = 0,6v_n + 300 - 300 = 0,6 \times v_n$.
   De plus, $v_0 = u_0 - 500 = 900 - 500 = 400$.
   $\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme } v_0 = 400.}$
   (b) Variations de (v_n) et (u_n).
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 400 \times 0,6^n$.
   $v_{n+1} - v_n = 400 \times 0,6^{n+1} - 400 \times 0,6^n = 400 \times 0,6^n(0,6 - 1) < 0$.
   $\boxed{\text{Donc } (v_n) \text{ décroît.}}$
   Autre méthode (avec des connaissance de TS) :
   Comme $v_0 = 400 > 0$ et que (v_n) est géométrique de raison $0,6$, avec $0 < 0,6 < 1$, la suite (v_n) est décroissante.
   Comme $v_n = u_n - 500$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 500$.
   L'ajout d'une constante ne change pas le sens de variation,
   $\boxed{\text{donc } (u_n) \text{ est elle aussi décroissante.}}$
   (c) Expressions de (v_n) et (u_n).
   $\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = 400 \times 0,6^n.\\ \text{Comme } u_n = v_n + 500, \text{ il vient pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 400 \times 0,6^n + 500.\end{array}}$
   (d) On cherche le plus petit entier n tel que $|u_n - 500| \leqslant 1$.
   D'après l'expression de u_n, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 500$.
   Par conséquent, $u_n - 500 > 0$, et $|u_n - 500| = u_n - 500$. A l'aide d'un algorithme de seuil ou en tâtonnant, on trouve que le plus petit entier n tel que $|u_n - 500| \leqslant 1$ est $n_0 = 12$.
   Pour le justifier, $u_{11} \approx 501,45$, $u_{12} \approx 500,87$, et on rappelle que la suite (u_n) est décroissante.
   $\boxed{\text{L'entier cherché est donc 12.}}$
   Comme (u_n) est décroissante, on peut en déduire que pour tout $n \geqslant 12$, on a l'encadrement $500 \leqslant u_n \leqslant 501$.

Partie B

L'année 2010, la société A détient 90% du marché, et la société B 10 %.
Chaque année, 20 % de la clientèle de A passe chez B, et que 20% de la clientèle de B passe chez A.
On considère une population représentative de 1000 clients.
On note a_n le nombre de clients de la société A l'année $(2010 + n)$.

1. $\boxed{a_0 = \dfrac{90}{1000} \times 1000 = 900.}$
   Le nombre de clients de la société B est $b_n = 1000 - a_n$.
   Donc $b_0 = 100$.
   Chaque année, A conserve 80 % de ses anciens clients et récupère 20 % des clients de B de l'année précédente.
   $\boxed{a_1 = 0,8 \times a_0 + 0,2 \times b_0 = 0,8 \times 900 + 0,2 \times 100 = 740.}$

2. Calculons a_2.
$a_2 = 0,8a_1 + 0,2 \times b_1 = 0,8a_1 + 0,2 \times (1000 - a_1)$
$\boxed{a_2 = 0,8 \times 740 + 0,2 \times (1000 - 740) = 644.}$
3. On rappelle que, pour l'année 2010+n, le nombre de clients de la société B est $b_n = 1000 - a_n$, et que chaque année, A conserve 80 % de ses anciens clients et récupère 20 % des clients de B de l'année précédente.
$b_n = 1000 - a_n$, $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2b_n$.
$\boxed{\text{Donc pour tout entier } n,\ a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2 \times (1000 - a_n).}$
4. $\boxed{\text{En développant, pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 0,6a_n + 200.}$
5. Évolution du marché.
La suite (a_n) peut donc être définie par son premier terme $a_0 = 900$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = 0,6a_n + 200$.
On remarque qu'il s'agit donc de la suite (u_n) étudiée dans la partie A.
D'après la partie A, il semble que (u_n) converge vers 500 (elle est décroissante, minorée par 500, et $|u_{12} - 500| \leqslant 1$).
On peut donc estimer que les parts marché des télécommunications vont devenir équilibrées entre les opérateurs A et B, et qu'on arrivera à l'équilibre au bout de 12 ans, soit en 2022.

Exercice 2 (35 page 94)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Variations de f.
On étudie le signe de $f'(x)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
Un carré est toujours positif, donc $f'(x) \geqslant 0$. $\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$
Plus précisément, $f'(x) = 0$ ssi $x = 3$, et pour tout $x \neq 3$, $f'(x) > 0$.
On peut donc affirmer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminons une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
$y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$f'(0) = 9$, et $f(0) = 0$.
Donc $y = 9(x-0) + 0 = 9x$.
$\boxed{\text{La tangente } T \text{ à la courbe de } f \text{ au point d'abscisse 0 a pour équation } y = 9x.}$
3. Étudions la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T.
On étudie le signe de $f(x) - 9x$.
$f(x) - 9x = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 9x = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 = x^2\left(\dfrac{1}{3}x - 3\right)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, et $x^2 = 0$ ssi $x = 0$.
$\dfrac{1}{3}x - 3 = 0$ ssi $x = 9$.

x	$-\infty$		0		9		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{3}x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - 9x$		$-$	0	$-$	0	$+$	

$\mathscr{C}_f$ et T ont deux points de contact, aux abscisses 0 et 9.
$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de } T \text{ sur } [9;+\infty[, \text{ et } \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } T \text{ sur }]-\infty;9].}$