Chapitre 13 : Nombres complexes et géométrie

I Affixe, module et argument

I.1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Il est ainsi appelé plan complexe.

Définition
À tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec a, b réels), on associe un unique point du plan, le point $M(a; b)$.
Réciproquement, à tout point point $M(a; b)$, on associe le le nombre complexe $z = a + ib$.
On dit que M est l'image du nombre complexe z, et que z est l'affixe du point M (z est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

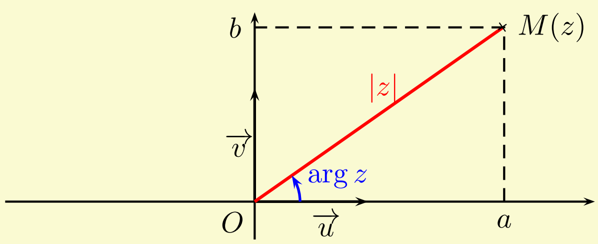
Propriété
1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
2. $z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, $z_{k\vec{w}} = kz_{\vec{w}}$.
4. Si I est le milieu de $[AB]$, $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
   Donc $z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + \mathrm{i}(y_B - y_A) = x_B + \mathrm{i}y_B - (x_A + \mathrm{i}y_A) = z_B - z_A$.
2. On raisonne de même en passant aux coordonnées pour montrer les points 2., 3. et 4..

I.2 Module et argument d'un nombre complexe

Définition
Soient $z = a+ib$ avec a, b réels un nombre complexe et M son image dans le plan complexe.
1. Le module de z, noté $|z|$ est la distance OM, soit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. <u>Si z est non nul</u>, un argument de z, noté $\arg z$ est une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

$$\text{Pour } z \neq 0, \arg z = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}).$$



Remarque

1. $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.
2. Un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments : si θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$, alors les autres mesures de cet angle sont les réels $\theta + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Le nombre 0 n'a pas d'argument car l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$ n'est pas défini si $M = O$.

Propriété

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $z \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\arg z = 0 \quad [2\pi]$.
3. $z \in \mathbb{R}_-^*$ si et seulement si $\arg z = \pi \quad [2\pi]$.
4. Un nombre complexe z non nul est imaginaire pur de partie imaginaire strictement positive si et seulement si $\arg z = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
5. Un nombre complexe z non nul est imaginaire pur de partie imaginaire strictement négative si et seulement si $\arg z = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Propriété

1. Pour tous points A et B d'affixes respectives z_A et z_B, $AB = |z_B - z_A|$.
2. Pour tous points distincts A et B, $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

Démonstration

1. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Alors l'affixe de M est $z_B - z_A$.
   Par conséquent, $AB = |z_B - z_A|$.
2. Soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. $M \neq O$ car $A \neq B$.
   $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

□

I.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition (et théorème)

Pour tout nombre complexe z non nul, $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.
Cette écriture est appelée une forme trigonométrique de z.

Remarque

Un nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques car $\arg z$ est défini à 2π près (par contre le module est unique).

Propriété

1. Deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument à un multiple de 2π près.
2. Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta \quad [2\pi]$.

Propriété
Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $z = a + ib$, avec $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. Alors,

Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$
- $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$

Ceci permet de retrouver θ.

Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

- $a = r\cos\theta$
- $b = r\sin\theta$

I.4 Propriétés du module et de l'argument

Propriété
Pour tout nombre complexe z,

1. $|\overline{z}| = |z|$, et $|-z| = |z|$.
2. Avec z non nul,

$$\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$$
$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi].$$

Propriété

1. Somme : pour tous nombres complexes z et z',
$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \text{ (inégalité triangulaire).}$$
2. Produit : pour tous nombres complexes z et z',
$$|zz'| = |z| \times |z'|.$$
Si de plus z et z' sont non nuls,
$$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi].$$
3. Quotient : Pour tous nombres complexes z et z', avec $z' \neq 0$,
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$
Pour tous z et z' non nuls,
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi].$$
4. Puissance : pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$|z^n| = |z|^n.$$
Si de plus z est non nul,
$$\arg(z^n) = n\arg z \quad [2\pi].$$

Démonstration

1. C'est la formulation avec des nombres complexes d'une inégalité sur les distances.
$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}|| \text{ où } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont des vecteurs d'affixes respectives } z \text{ et } z'.$$

2. z et z' étant non nuls tous les deux, on peut considérer leurs formes trigonométriques.
$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, et $z' = r'(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta')$.

$$\begin{aligned} zz' &= rr'(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \times (\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') \\ &= rr'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta)] \\ &= rr'[\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta')] \end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une forme trigonométrique de zz', ce qui implique $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$.
Remarque, si z ou z' est nul, l'égalité $|zz'| = |z| \times |z'|$ est évidemment vraie.
3. On raisonne par récurrence.
4. On pose $Z = \dfrac{z'}{z}$, d'où $z' = z \times Z$, et on applique les résultats sur le produit. □

Remarque
Il n'y a pas de formule générale donnant le module d'une somme de deux nombres complexes.
On ne peut rien dire en général sur $\arg(z + z')$.

Conséquence
Si $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$ sont des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, alors

1. $\dfrac{CD}{AB} = \dfrac{|d-c|}{|b-a|} = \left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|$
2. $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\dfrac{d-c}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Démonstration
1. C'est direct puisque $AB = |b-a|$ et d'après la propriété $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
2. Comme $A \neq B$ et $C \neq D$, l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$ est bien défini.

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{CD}\right) \quad [2\pi] \\ &= \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{CD}\right) - \left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi] \\ &= \arg(d-c) - \arg(b-a) \quad [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

II Notation exponentielle et application

On a vu que pour tous a et b réels, $(\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) = \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)$.
En posant $f(x) = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, on a donc $f(a) \times f(b) = f(a+b)$.
La fonction f possède une propriété de la fonction exponentielle.

Définition
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Remarque
$|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg e^{i\theta} = \theta \quad [2\pi]$.

Définition
Pour tout nombre complexe z non nul, on appelle notation exponentielle de z toute écriture $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \quad [2\pi]$.

Remarque

1. Comme pour la forme trigonométrique, la notation exponentielle n'est pas unique car $\arg z$ est seulement défini modulo 2π.
2. Pour calculer des sommes de nombres complexes, la forme algébrique ($z = a + ib$) est la plus appropriée.
   Pour calculer des produits, quotients, puissances de nombres complexes, la forme trigonométrique ou exponentielle est la plus appropriée.

Propriété
Pour tous réels θ et θ',

1. $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.
2. $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
3. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre).

Remarque

1. La formule de Moivre s'écrit aussi pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
2. Pour tout réel θ, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$.
   En addtionnant et soustrayant ces égalités, on obtient les formules d'Euler :

Conséquence (formules d'Euler)
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Rappel : triangle de Pascal pour les coefficients binomiaux

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Par exemple, $\binom{4}{2} = 6$, et $\binom{6}{3} = 20$.

Remarque
Les coefficient binomiaux interviennent dans la formule qui donne le développement de $(a+b)^n$:
Pour tous complexes a et b, et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

Exemple :
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exercice 1
Linéariser $\cos^3 x$, en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2
Linéariser $\sin^3 x$, en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ [1].

Remarque
La notation exponentielle permet de retrouver des formules de trigonométrie.
Sur les formules d'addition par exemple, pour tous réels a et b,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} \\
\cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b) &= (\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) \\
&= \cos a \cos b + \mathrm{i}\cos a \sin b + \mathrm{i}\sin a \cos b - \sin a \sin b \\
&= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + \mathrm{i}(\sin a \cos b + \sin b \cos a)
\end{aligned}$$

D'où, en identifiant les parties réelles et imaginaires,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Remarque
Quelques situations géométriques classiques.
Soient A, B C trois points distincts d'affixes a, b et c respectivement.

1. $\dfrac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$ si et seulement si ($AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{2}$).
   Cela équivaut à dire que le triangle ABC est direct, rectangle isocèle en A.
2. $\dfrac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ si et seulement si ($AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$).
   Cela équivaut à dire que le triangle ABC est équilatéral direct.

Exercice 3 (lieux géométriques)
Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts. Montrer les assertions suivantes :

---

1. Réponses : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^3(x) = -\dfrac{1}{4}\sin(3x) + \dfrac{3}{4}\sin x$, puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{8-5\sqrt{2}}{12}$.

1. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$ est la droite (AB) privée du point A.
2. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point A.
3. L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\left|\dfrac{z-b}{z-a}\right| = 1$ est la médiatrice du segment $[AB]$.