1re G. Interrogation n° 6

Correction du Sujet 1

Exercice 1 (3 points)

1. Donner deux propriétés du cosinus ou du sinus d'un réel.
   Pour tout réel x,
   a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ b) $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$,et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.
2. Compléter les formules sur les angles associés.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   a) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ b) $\sin(\pi - x) = \sin x$

Exercice 2 (6 points)

1. Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par $a_n = \left(3 - \frac{1}{2}n\right)^2$. Calculer a_0, a_1 et a_2.
   $a_0 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 0\right)^2 = 9$. $a_1 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 1\right)^2 = \frac{25}{4}$. $a_2 = \left(3 - \frac{1}{2} \times 2\right)^2 = 4$.
2. Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 5$ et pout tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n + 1$.
   Calculer b_1 et b_2.
   $b_1 = -\frac{2}{3}b_0 + 1 = -\frac{2}{3} \times 5 + 1 = -\frac{7}{3}$.
   $b_2 = -\frac{2}{3}b_1 + 1 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{3}\right) + 1 = \frac{23}{9}$.
3. Soit (c_n) la suite définie par $c_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n - n^2 + 3$.
   Calculer c_1 et c_2.
   $c_1 = c_0 - 0^2 + 3 = 3 - 0 + 3 = 6$. $c_2 = c_1 - 1^2 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8$.
4. Soit (d_n) la suite définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = 3d_{n+1} + d_n$. Calculer d_2 et d_3.
   $d_2 = 3d_1 + d_0 = 3 \times 1 + 1 = 4$. $d_3 = 3d_2 + d_1 = 3 \times 4 + 1 = 13$.

Exercice 3 (5 points)

1. Placer sur le cercle ci-dessous les images des réels suivants.
   $0\,;\pi\,;-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{25\pi}{2}\,;\,-\frac{13\pi}{4}\,;\,\frac{59\pi}{3}\,;\,\frac{89\pi}{6}$.
2. Déterminer et justifier les valeurs exactes à l'aide des angles associés.
   $\cos\frac{5\pi}{4}$; $\cos\frac{2\pi}{3}$; $\sin\frac{5\pi}{6}$; $\sin\frac{15\pi}{4}$.
   $\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$.
   $\boxed{\text{Donc } \cos\frac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.}$
   $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$
   $\boxed{\text{Donc } \cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.}$
   $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin x$
   $\boxed{\text{Donc } \sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.}$
   $\frac{15\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2 \times 2\pi - \frac{\pi}{4}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.
   $\boxed{\text{Donc } \sin\frac{15\pi}{4} = \sin -\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.}$

Figure de l'exercice 3

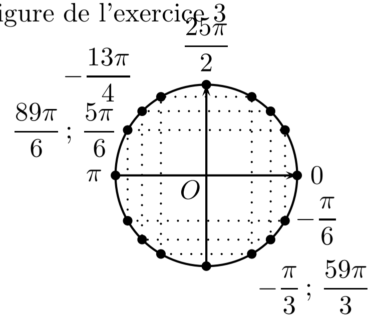
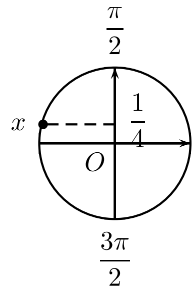


Figure de l'exercice 4.



Exercice 4 (4 points)

Soit x le réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x = \frac{1}{4}$.

1. Placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.
2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
   Donc $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
   Ainsi, $\cos x = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou bien $\cos x = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.
   Comme x appartient à $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \leqslant 0$. $\boxed{\cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}.}$

Exercice 5 (2 points + 1 bonus)

Soit $n \geqslant 4$. On note d_n le nombre de diagonales du polygone régulier à n côtés. (on appelle diagonale toute droite reliant deux sommets non adjacents du polygone).

1. Donner d_4, d_5, et d_6.
   $\boxed{d_4 = 2,\ d_5 = 5, \text{ et } d_6 = 9.}$
2. Donner une expression explicite de d_n en fonction de n. Justifier.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 4,\ d_n = \frac{n(n-3)}{2}.}$
   Il y a $(n-3)$ diagonales partant d'un sommet donné.
   Le total de toutes les diagonales partant de l'ensemble des sommets est donc $n(n-3)$, et chaque diagonale a alors été comptée deux fois (puisqu'elle relie deux sommets). Donc $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.