Devoir de mathématiques n^{o} 2
Éléments de correction du Sujet 3

Exercice 1 (1 point)

Donner la définition de deux événements A et B indépendants.

A et B sont indépendants si $P(A) = P_B(A)$. Lorsque $P(B) = 0$, on considère que A et B sont indépendants.

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.
On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$.
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-2}{-2} = 3$. $\qquad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$.

La parabole coupe l'axe des abscisses en les points $A(1;0)$ et $B(3;0)$.

2. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Dresser le tableau de variation de f. Justifier.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$. $\qquad \beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{-4} = 1$.
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(2;1)$.
   Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

4. Soit (d) la droite d'équation $y = 2x - 3$.
   Étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite (d).
   On étudie le signe de $f(x) - (2x - 3)$.
   $f(x) - (2x - 3) = -x^2 + 4x - 3 - 2x + 3 = -x^2 + 2x = x(-x + 2)$.
   $x(-x + 2) = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 2$.
   Le trinôme $f(x) - (2x - 3)$ est du signe de a (négatif) à l'extérieur des racines.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x) - (2x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\mathcal{P}$ est en-dessous de (d) sur $]\infty; 0[\cup]2; +\infty[$. Et $\mathcal{P}$ est au-dessus de (d) sur $]0; 2[$.

5. Pour tout a réel, on note D_a la droite d'équation $y = ax$.
   Déterminer les valeurs de a pour lesquelles D_a et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection.
   D_a et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection ssi l'équation $f(x) = ax$ n'a pas de solution.
   $f(x) = ax$ ssi $-x^2 + 4x - 3 = ax$, soit $-x^2 + (4 - a)x - 3 = 0$.
   $\Delta =$ "$b^2 - 4ac$" $= (4 - a)^2 - 12 = a^2 - 8a + 16 - 12 = a^2 - 8a + 4$.
   L'équation n'a pas de solution ssi $\Delta = a^2 - 8a + 4 < 0$.
   On étudie ce trinôme de la variable a.
   Son discriminant est $\Delta_2 = (-8)^2 - 4 \times 4 = 64 - 16 = 48$.
   $a_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 - \sqrt{48}}{2} = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$.
   $a_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8 + \sqrt{48}}{2} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7,46$.
   Le trinôme est positif (signe de "a") à l'extérieur des racines.

a	$-\infty$		$4 - 2\sqrt{3}$		$4 + 2\sqrt{3}$		$+\infty$
$\Delta = a^2 - 8a + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $\Delta < 0$ ssi $a \in]4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}[$.

D_a et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection lorsque $a \in]4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}[$.

Exercice 3 (2 points)

Déterminer l'expression de la fonction f du second degré dont la parabole a pour sommet le point $S(2; -5)$ et passe par le point $A(6; -9)$.
D'après la forme canonique, comme le sommet est le point $S(2; -5)$, il existe un réel a tel que $f(x) = a(x - 2)^2 - 5$.
De plus, comme la courbe passe par le point $A(6; -9)$, $f(6) = -9$.
Ainsi, $a \times (6 - 2)^2 - 5 = -9$, soit $16a - 5 = -9$, $16a = -4$, et $a = -\dfrac{1}{4}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{1}{4}(x - 2)^2 - 5$.

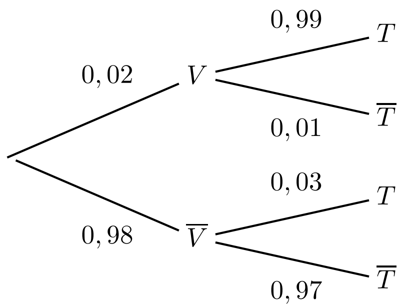
Exercice 4 (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$.
On pose $U = x^2$, l'équation s'écrit $U^2 + 7U - 8 = 0$.

$\Delta = 81 > 0$, $U_1 = -8$, et $U_2 = 1$.
On étudie les équations $x^2 = -8$ et $x^2 = 1$.
L'équation $x^2 = -8$ n'a pas de solution réelle car un carré est toujours positif.
$x^2 = 1$ ssi $x = -1$ ou $x = 1$.
$\boxed{\text{Les solutions sont } -1 \text{ et } 1.}$

Exercice 5 (5 points)

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



(b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
$\boxed{P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198.}$

2. Déterminer $P(T)$. Justifier.
V et $\overline{V}$ forment une partition de Ω. D'après la formule des probabilités totales,
$\boxed{P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0,0198 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492.}$

3. (a) Justifier par un calcul la phrase : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
$\boxed{P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0198}{0,0492} \approx 0,4024.}$
En effet, si la personne a un test positif, il y a environ 40% de "chances" qu'elle soit contaminée par le virus.

(b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.
$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,0492 = 0,9508$.
Donc $P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,98 \times 0,97}{0,9508} \approx 0,9998$.
$\boxed{\text{Sachant que son test est négatif, la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée est d'environ 0,9998.}}$

Exercice 6 (3 points)

On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 70% des messages reçus sont des spams
- 95% des spams sont éliminés
- 2% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés	665	6	671
Messages conservés	35	294	329
Total	700	300	1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.

   (a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.
   $\boxed{P(S) = \dfrac{700}{1000} = 0,7 \,;\ P(E) = 0,671 \,;\ P(S \cap E) = 0,665 \,;\ \text{et } P_S(\overline{E}) = \dfrac{35}{700} = 0,05.}$

   (b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.
   S et E sont indépendants ssi $P(E) = P_S(E)$.
   Or, $P(E) = 0,671$, et $P_S(E) = 0,95$ (d'après l'énoncé : 95% des spams sont éliminés).
   Sinon, $P_S(E) = 1 - P_S(\overline{E}) = 1 - 0,05 = 0,95$.
   $\boxed{\text{Donc } P(E) \neq P_S(E).\ S \text{ et } E \text{ ne sont pas indépendants.}}$

Exercice 7 (bonus, 1 point)

Soient A et B des événements tels que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(A) \neq 1$, et $P(B) \neq 1$.
Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.
On suppose que A et B sont indépendants, soit $P_B(A) = P(A)$.
On veut montrer que $\overline{A}$ et B sont indépendants, soit $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.
On a toujours $P_B(A) + P_B(\overline{A}) = 1$.

$$\begin{aligned} P_B(\overline{A}) &= 1 - P_B(A) \\ &= 1 - P(A) \\ &= P(\overline{A}) \end{aligned}$$

En effet, comme A et B sont indépendants, $P_B(A) = P(A)$.
Donc $P_B(\overline{A}) = P(\overline{A})$.
$\boxed{\text{Les événements } \overline{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$

Devoir de mathématiques n° 2
Éléments de correction du sujet 4

Exercice 8 (1 point)
Énoncer la formule des probabilités totales associée à une partition A_1, A_2, $\dots$, A_n de l'univers.
Pour tout événement B,
$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$
$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.

Exercice 9 (7 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.
   On calcule les racines : 1 et 3.
   La parabole coupe l'axe des abscisses en les points $A(1;0)$ et $B(3;0)$.
2. Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$. Justifier.
   Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines. Ici $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Dresser le tableau de variation de f. Justifier.
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$. $\beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{4} = -1$.
   Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(2;-1)$.
   Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

4. Soit (d) la droite d'équation $y = -2x + 3$.
   Étudier la position relative de la parabole $\mathcal{P}$ et de la droite (d).
   On étudiele signe de $f(x) - (-2x + 3)$.
   $f(x) - (-2x + 3) = x^2 - 4x + 3 + 2x - 3 = x^2 - 2x = x(x-2)$, qui s'annule en 0 et en 2.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x) - (-2x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de (d) sur $]\infty;0[\cup]2;+\infty[$.
   Et $\mathcal{P}$ est en-dessous de (d) sur $]0;2[$.

5. Pour tout a réel, on note D_a la droite d'équation $y = ax$.
   Déterminer les valeurs de a pour lesquelles D_a et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection.
   $f(x) = ax$ ssi $x^2 + (-4-a)x + 3 = 0$.
   $\Delta = (a+4)^2 - 12 = a^2 + 8a + 4$.
   D_a et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection ssi $\Delta = a^2 + 8a + 4 < 0$.
   $\Delta_2 = 64 - 16 = 48$.
   $a_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{48}}{2} = -4 - 2\sqrt{3} \approx -7,46$.
   $a_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{48}}{2} = -4 + 2\sqrt{3} \approx -0,53$.
   Le trinôme est positif (signe de "a") à l'extérieur des racines.

a	$-\infty$		$-4-2\sqrt{3}$		$-4+2\sqrt{3}$		$+\infty$
$\Delta = a^2 - 8a + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $\Delta < 0$ ssi $a \in]-4-2\sqrt{3};-4+2\sqrt{3}[$.
   D_a et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point d'intersection lorsque $a \in]-4-2\sqrt{3};-4+2\sqrt{3}[$.

Exercice 10 (2 points)
Déterminer l'expression de la fonction f du second degré dont la parabole a pour sommet le point $S(-3;-1)$ et passe par le point $A(1;7)$.
D'après la forme canonique, comme le sommet est le point $S(-3;-1)$, il existe un réel a tel que $f(x) = a(x+3)^2 - 1$.
De plus, comme la courbe passe par le point $A(1;7)$, $f(1) = 7$.
Ainsi, $a \times (1+3)^2 - 1 = 7$, soit $16a - 1 = 7$, $16a = 8$, et $a = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+3)^2 - 1$.

Exercice 11 (2 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$.
On pose $U = x^2$, l'équation s'écrit $2U^2 + 5U - 3 = 0$.
$\Delta = 49 > 0$, $U_1 = -3$, et $U_2 = \dfrac{1}{2}$.
On étudie les équations $x^2 = -3$ et $x^2 = \dfrac{1}{2}$.
L'équation $x^2 = -3$ n'a pas de solution réelle car un carré est toujours positif.
$x^2 = \dfrac{1}{2}$ ssi $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\boxed{\text{Les solutions sont } -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \dfrac{\sqrt{2}}{2}.}$

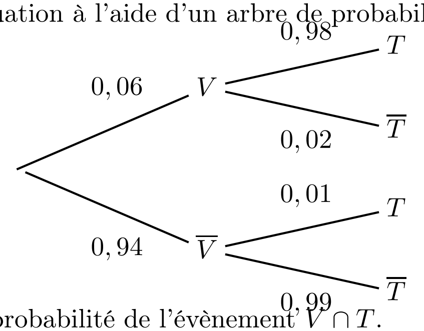
Exercice 12 (5 points)

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 6 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

— La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,98$ (sensibilité du test).
— La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,99$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.



(b) En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

$\boxed{P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) = 0,06 \times 0,98 = 0,0588.}$

2. Déterminer la probabilité que le test soit positif.

$\boxed{P(T) = P(V \cap T) + P(\overline{V} \cap T) = 0,0588 + 0,94 \times 0,01 = 0,0682.}$

3. (a) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier. « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

$\boxed{P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,0588}{0,0682} \approx 0,86. \text{ L'affirmation est fausse.}}$

(b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

$\boxed{P_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{P(\overline{V} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,94 \times 0,99}{1 - 0,0682} \approx 0,9987.}$

Exercice 13 (3 points)

On étudie un nouveau logiciel qui est censé filtrer les messages indésirables (ou spams) sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1 000 messages reçus et ont observé que :

- 75% des messages reçus sont des spams
- 96% des spams sont éliminés
- 4% des messages bienvenus sont éliminés

1. Compléter le tableau d'effectifs suivant (aucune justification n'est attendue) :

	Spams	Messages bienvenus	Total
Messages éliminés	720	10	730
Messages conservés	30	240	270
Total	750	250	1 000

2. On choisit un message au hasard. Tous les messages ont la même probabilité d'être choisis. On considère les événements suivants :
   - S : « le message est un spam »
   - E : « le message est éliminé »

   On notera respectivement $\overline{S}$ et $\overline{E}$ leurs contraires.

   (a) Donner sans justification $P(S)$ et $P(E)$, $P(S \cap E)$, et $P_S(\overline{E})$.

   $\boxed{P(S) = \dfrac{750}{1000} = 0,75 \,;\; P(E) = 0,73 \,;\; P(S \cap E) = 0,72 \,;\text{ et } P_S(\overline{E}) = \dfrac{30}{750} = 0,04.}$

   (b) S et E sont-ils indépendants ? Justifier.
   S et E sont indépendants ssi $P(E) = P_S(E)$.
   Or, $P(E) = 0,73$, et $P_S(E) = 0,96$ (d'après l'énoncé : 96% des spams sont éliminés).

   $\boxed{\text{Donc } P(E) \neq P_S(E). \; S \text{ et } E \text{ ne sont pas indépendants.}}$

Exercice 14 (bonus, 1 point)

Soient A et B des événements tels que $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, $P(A) \neq 1$, et $P(B) \neq 1$.
Montrer que si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants.
Voir sujet 3