1re G. Correction du devoir maison n° 3

Exercice 1 (42 page 289)

A : "L'état de santé de la personne s'est amélioré".
M : "La personne a été traitée avec le médicament".
P : "La personne a été traitée avec le placebo" ($P = \overline{M}$).

	A	$\overline{A}$	Total
M	51%	16%	67%
P	5%	28%	33%
Total	56 %	44%	100%

1. Le 5% indique que $P(P \cap A) = 0,05$.
   Le 44% indique que $P(\overline{A}) = 0,44$.

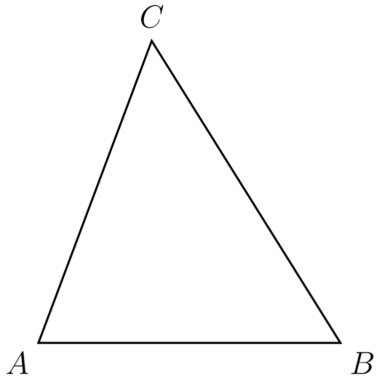
2. Déterminer $P_A(M)$.
   Par définition, $P_A(M) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,51}{0,56} = \dfrac{51}{56}$.

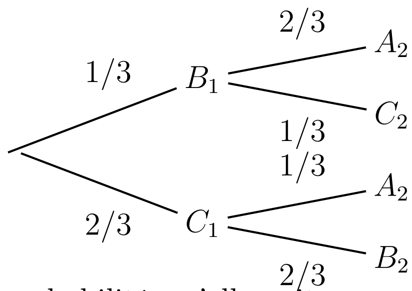
3. Probabilité que la personne choisie n'ait pas vu son état de santé s'améliorer sachant qu'elle a pris le médicament.
   Avec les notations de l'exercices, on cherche $P_M(\overline{A})$.
   $P_M(\overline{A}) = \dfrac{P(M \cap \overline{A})}{P(M)} = \dfrac{0,16}{0,67} = \dfrac{16}{67}$.

Exercice 2 (64 page 293)

Une coccinelle se déplace aléatoirement sur les sommets d'un triangle ABC direct. Elle part du sommet A. Son déplacement se fait 2 fois sur 3 dans le sens des aiguilles d'une montre. On s'intéresse aux deux premiers déplacements.

1. Représenter la situation par un arbre ou un tableau.





2. Quelle est la probabilité qu'elle soit revenue au point de départ après deux déplacements ?
   La probabilité que la coccinelle soit revenue à son point de départ après deux déplacements est $P(A_2)$.
   B_1 et C_1 forment une partition de Ω.
   D'après la formule des probabilités totales,
   $P(A_2) = P(B_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$.

   La probabilité qu'elle soit revenue en A après deux déplacements est de $\dfrac{4}{9}$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x - 35}$.

$f(x)$ existe si et seulement si l'expression sous le radical est positive ou nulle, soit $2x^2 + 3x - 35 \geqslant 0$.

On résout donc cette inéquation du second degré.

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-35) = 289 = 17^2 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 17}{4} = -5$.

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 17}{4} = \dfrac{7}{2}$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, ici on a $a = 2 > 0$.

Ainsi

x	$-\infty$		-5		$7/2$		$+\infty$
$2x^2 + 3x - 35$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty; -5] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right[.}$$

Exercice 4

On pose, pour tout $x \neq -2$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 1$.

1. Montrer que pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x+2}$.

   Soit x un réel différent de -2.

   $f(x) - g(x) = \dfrac{x-2}{x+2} - (-x-1) = \dfrac{x-2}{x+2} + x + 1$

   $f(x) - g(x) = \dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{(x+1)(x+2)}{x+2}$

   $f(x) - g(x) = \dfrac{x - 2 + x^2 + 3x + 2}{x+2}$.

   $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x+2} = \dfrac{x(x+4)}{x+2}$.

2. En déduire la position relative des courbes de f et de g.

   On étudie le signe de $f(x) - g(x)$ à l'aide de la forme factorisée $\dfrac{x(x+4)}{x+2}$.

   $x + 2 = 0$ ssi $x = -2$ (valeur interdite).

   $x(x+4) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $x = -4$).

   Le trinôme $x^2 + 4x$ prend le signe de a ($a = 1 > 0$) à l'extérieur des racines.

   $x \mapsto x + 2$ est une fonction affine croissante ($m = 1 > 0$).

   $x + 2 > 0$ ssi $x > -2$. Ainsi,

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$x(x+4)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   Conclusion sur la position relative :

   > Les courbes de f et g se coupent aux points d'abscisses -4 et 0.
   > $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $]-4; -2[\cup]0; +\infty[$.
   > $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty; -4[\cup]-2; 0[$.

Exercices facultatifs du devoir maison n^o 3

Exercice 5

1. Résoudre $2x^4 + x^2 - 6 = 0$.
   On pose $U = x^2$.
   L'équation devient $2U^2 + U - 6 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 2 \times 6 = 49 = 7^2 > 0$.
   $U_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-7}{2\times 2} = -2$.
   $U_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+7}{2\times 2} = \dfrac{3}{2}$.
   D'où $x^2 = \dfrac{3}{2}$ ou $x^2 = -2$.
   L'équation $x^2 = \dfrac{3}{2}$ donne $x = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
   L'équation $x^2 = -2$ n'a pas de solution réelle (un carré est toujours positif).
   Les solutions de l'équation $2x^4 + x^2 - 6 = 0$ sont donc $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

2. Résoudre $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.
   On pose $U = x^2$.
   L'équation devient $U^2 + 4U - 5 = 0$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 \times 5 = 36 = 6^2 > 0$.
   $U_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4-6}{2} = -5$. $U_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-4+6}{2} = 1$.
   D'où $x^2 = -5$ ou $x^2 = 1$.
   L'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solution réelle (un carré est toujours positif).
   L'équation $x^2 = 1$ donne $x = -1$ ou $x = 1$.
   Les solutions de l'équation $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ sont donc -1 et 1.

Exercice 6 (183 page 67 – les fourmis)

On note t_1 le temps de trajet aller, et t_2 le temps de trajet retour pour la fourmi ravitailleuse.
La durée totale est $t = t_1 + t_2$.
On note v_1 la vitesse de la fourmi ravitailleuse, et v_2 celle de la fourmi de tête ($v_1 > v_2$).
$vitesse = \dfrac{distance}{temps}$, donc $distance = temps \times vitesse$.
Durant le trajet aller qui dure t_1 les fourmis vont dans le même sens, et la soustraction des distances fait 50.
Ainsi, $50 = t_1v_1 - t_1v_2 = t_1(v_1 - v_2)$. Donc $t_1 = \dfrac{50}{v_1 - v_2}$.
Durant le trajet retour qui dure t_2 les fourmis vont en sens contraire, et la somme des distances fait 50.
$50 = t_2v_1 + t_2v_2 = t_2(v_1 + v_2)$. Ainsi, $t_2 = \dfrac{50}{v_1 + v_2}$.
Durant toute la durée, la colonne avance de 50 à la vitesse v_2, soit $t = \dfrac{50}{v_2}$.
Ainsi, $t = t_1 + t_2$, soit

$$\frac{50}{v_2} = \frac{50}{v_1 - v_2} + \frac{50}{v_1 + v_2}$$

Cette équation revient à $\dfrac{1}{v_2} = \dfrac{v_1 + v_2 + v_1 - v_2}{v_1^2 - v_2^2}$.
Puis, par produit en croix, $2v_1v_2 = v_1^2 - v_2^2$.
$v_1^2 - 2v_1v_2 - v_2^2 = 0$, soit $(v_1 - v_2)^2 - 2v_2^2 = 0$. On factorise à l'aide de la 3^e identité remarquable, il vient
$(v_1 - (1+\sqrt{2})v_2)(v_1 + (-1+\sqrt{2})v_2) = 0$.
Or, $-1 + \sqrt{2} > 0$, et donc $(v_1 + (-1+\sqrt{2})v_2) > 0$ (non nul).
Ainsi, on obtient $v_1 - (1+\sqrt{2})v_2 = 0$, soit $v_1 = (1+\sqrt{2})v_2$.
La distance d parcourue par la fourmi ravitailleuse est alors donnée par :
$d = v_1 \times t = (1+\sqrt{2})v_2 \times \dfrac{50}{v_2} = (1+\sqrt{2}) \times 50 \approx 120,71$.

La fourmi ravitailleuse a parcouru environ 120,71 cm.