

Terminale Générale - Correction du devoir n° 1

Sujet 1

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Montrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Initialiation

Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$.

On a bien $u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1}$.

Hérédité

Soit $k \geq 0$. Supposons que $u_k = \frac{2}{2k+1}$.

Montrons que $u_{k+1} = \frac{2}{2(k+1)+1}$, soit $u_{k+1} = \frac{2}{2k+3}$.

On a $u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{1+\frac{2}{2k+1}} = \frac{\frac{2}{2k+1}}{\frac{2k+1+2}{2k+1}} = \frac{2}{2k+3}$

Donc $u_{k+1} = \frac{2}{2k+1} \times \frac{2k+1}{2k+3} = \frac{2}{2k+3}$.

Conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Exercice 2

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété $P(n)$:

« $4^{2n} + 1$ est divisible par 3. »

1. La propriété $P(n)$ est-elle héréditaire ? Justifier.

Soit $k \geq 0$. Supposons que $4^{2k} + 1$ est divisible par 3.

$$4^{2(k+1)} + 1 = 4^{2k+2} + 1 = 4^{2k} \times 4^2 + 1$$

$$4^{2(k+1)} + 1 = 16 \times 4^{2k} + 1 = 15 \times 4^{2k} + (4^{2k} + 1).$$

Par hypothèse de récurrence, $4^{2k} + 1$ est multiple de 3.

Et $15 \times 4^{2k} = 3 \times 5 \times 4^{2k}$ est aussi multiple de 3.

Par somme de deux multiples de 3, $4^{2(k+1)} + 1$ multiple de 3.

La propriété est héréditaire.

2. La propriété $P(n)$ est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier.

Pour $n = 0$, $4^{2 \times 0} + 1 = 1 + 1 = 2$ n'est pas multiple de 3.

La propriété n'est donc pas toujours vraie puisqu'elle n'est pas vraie pour $n = 0$.

Exercice 3

Soit l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e; f\}$.

1. k -uplets de E .

- (a) Donner un exemple de 4-uplet d'éléments de E .

$(a; c; d; c)$ convient.

- (b) Déterminer le nombre de 4-uplets de E .

E a 6 éléments.

Le nombre de 4-uplets de E est donc $6^4 = 1296$.

- (c) Déterminer le plus petit entier k pour lequel le nombre de k -uplets de E est supérieur ou égal à 100 000.

Le nombre de k -uplets de E est 6^k .

$$6^6 = 46656 < 100000 \text{ et } 6^7 = 279936 > 100000.$$

Le nombre de 7-uplets de E dépasse 100000 (mais pas celui de 6-uplets).

L'entier cherché est 7.

2. Sous-ensembles de E .

- (a) Donner un exemple de sous-ensemble de E ayant 4 éléments.

L'ensemble $\{b; c; d; e\}$ convient.

- (b) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de tous les sous-ensembles de E .

E a 6 éléments, donc $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^6 = 64$.

E admet 64 sous-parties.

Sujet 2

Exercice 4

Soit (V_n) la suite définie par
$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{3} \\ V_{n+1} = \frac{n+1}{3n} V_n \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $V_n = \frac{n}{3^n}$.

Initialisation

$V_1 = \frac{1}{3}$, et pour $n = 1$, $\frac{n}{3^n} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$.

Donc $V_1 = \frac{1}{3^1}$

Hérédité

Soit $k \geq 1$.

Supposons que $V_k = \frac{k}{3^k}$.

Montrons que $V_{k+1} = \frac{k+1}{3^{k+1}}$.

On a $V_{k+1} = \frac{k+1}{3k} \times V_k$ et $V_k = \frac{k}{3^k}$.

Donc $V_{k+1} = \frac{k+1}{3k} \times \frac{k}{3^k} = \frac{k(k+1)}{k \times 3 \times 3^k} = \frac{k+1}{3^{k+1}}$.

Conclusion

Pour tout $n \geq 1$, $V_n = \frac{n}{3^n}$.

Exercice 5

Pour tout entier naturel n , on considère la propriété $P(n)$:

« $3^{2n} - 1$ est divisible par 8. »

1. La propriété $P(n)$ est-elle héréditaire ? Justifier.

Soit $k \geq 0$. On suppose que $3^{2k} - 1$ est divisible par 8.

$$3^{2(k+1)} - 1 = 3^{2k+2} - 1 = 3^{2k} \times 3^2 - 1$$

$$3^{2(k+1)} - 1 = 9 \times 3^{2k} - 1 = 8 \times 3^{2k} + (3^{2k} - 1).$$

Il est clair que 8×3^{2k} est multiple de 8.

Par hypothèse de récurrence, $3^{2k} - 1$ est aussi multiple de 8.

Par somme de deux multiples de 8, $3^{2(k+1)} - 1$ est aussi multiple de 8.

La propriété est héréditaire.

2. La propriété $P(n)$ est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier.

Pour $n = 0$, $3^{2 \times 0} - 1 = 1 - 1 = 0$ est bien multiple de 8 car $0 = 8 \times 0$.

Donc l'initialisation est vérifiée.

D'après la question 2, la propriété est héréditaire.

Donc, par récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 1$ est multiple de 8.

Exercice 6

Soit l'ensemble $E = \{m; n; o; p\}$.

1. k -uplets de E .

- (a) Donner un exemple de triplet (ou 3-uplet) d'éléments de E .

$(p; o; p)$ convient.

- (b) Déterminer le nombre de 3-uplets de E .

E a 4 éléments.

Le nombre de 3-uplets de E est $4^3 = 64$.

- (c) Déterminer le plus petit entier k pour lequel le nombre de k -uplets de E est supérieur ou égal à 100 000.

Le nombre de k -uplets de E est 4^k .

$$4^8 = 65536 \text{ et } 4^9 = 262144 > 100000.$$

Le plus petit entier k pour que $4^k \geq 100000$ est $k = 9$.

L'entier cherché est 9.

2. Sous-ensembles de E .

- (a) Donner un exemple de sous-ensemble de E ayant 2 éléments.

$\{m; p\}$ convient.

- (b) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de tous les sous-ensembles de E .

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^4 = 16.$$

E admet 16 sous-ensembles.