Correction du devoir maison ° 2

1. a) Équation $3m^2+7m-6=0$.
$\Delta=b^2-4ac=49+72=121=11^2$.
$\Delta>0$, donc l'équation a deux solutions :
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7-11}{6}=-3$. $\qquad x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-7+11}{6}=\dfrac{2}{3}$.
$\boxed{\text{Les solutions sont } -3 \text{ et } \dfrac{2}{3}.}$

b) Signe de $3m^2+7m-6=0$.
Le trinôme $3m^2+7m-6$ a pour racines -3 et $\dfrac{2}{3}$.
Il prend le signe de a ($a=3>0$) à l'extérieur des racines.

m	$-\infty$		-3		$2/3$		$+\infty$
$3m^2+7m-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Valeur de m pour que (E) ne soit pas du second degré.
(E) n'est pas une équation du second degré si et seulement si le coefficient de x^2 est nul, c'est à dire $m-1=0$, c'est à dire $m=1$.
(E) s'écrit alors $-4x-5=0$ c'est à dire $x=-\dfrac{5}{4}$.
$\boxed{\text{Donc, si } m=1, \text{ l'équation } (E) \text{ a une solution : } -\dfrac{5}{4}.}$

3. a) -1 est racine de (E) si et seulement si
$(m-1)\times(-1)^2-4m\times(-1)+m-6=0$
$m-1+4m+m-6=0$, soit $6m-7=0$, et $m=\dfrac{7}{6}$.
$\boxed{-1 \text{ est racine de } (E) \text{ si et seulement si } m=\dfrac{7}{6}}.$

b) 1 est racine de (E) si et seulement si
$(m-1)\times(1)^2-4m\times(1)+m-6=0$
$m-1-4m+m-6=0$, soit $-2m-7=0$, soit enfin $m=-\dfrac{7}{2}$.
$\boxed{1 \text{ est racine de } (E) \text{ si et seulement si } m=-\dfrac{7}{2}.}$

c) m pour que (E) ait une racine double.
(E) a pour discriminant :
$\Delta=(4m)^2-4(m-1)(m-6)=16m^2-4(m^2-7m+6)$.
$\Delta=16m^2-4m^2+28m-24=12m^2+28m-24$.
$\Delta=4(3m^2+7m-6)$.
Or on sait que (E) admet une racine double si et seulement si elle est du second degré ($m\neq 1$) avec $\Delta=0$, c'est à dire $3m^2-7m-6=0$.
D'après la question 1)a) :
$\boxed{(E) \text{ admet une racine double ssi } m=-3 \text{ ou } m=\dfrac{2}{3}.}$

d) (E) n'admet pas de racine réelle si et seulement si elle est du second degré avec $\Delta<0$, c'est à dire $3m^2-7m-6<0$. D'après la question 1)b) :
$\boxed{(E) \text{ n'admet pas de racine réelle ssi } m \text{ appartient à } \left]-3;\dfrac{2}{3}\right[.}$
On vérifie que sur cet intervalle $m\neq 1$.

e) (E) admet deux racines réelles distinctes si et seulement si elle est du second degré avec $\Delta>0$.
Cela revient à $m\neq 1$ et $3m^2-7m-6>0$. d'après la question 1)b) :
$3m^2-7m-6>0$ ssi $m\in]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{2}{3};+\infty\right[$.
Or, 1 appartient à cette réunion d'intervalles.
$\boxed{(E) \text{ admet deux racines réelles distinctes si et seulement si } m \text{ appartient à }]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[.}$

f) On a :
Pour tout réel x, $(m-1)x^2-4mx+m-6<0$ si et seulement si (E) n'a pas de racine réelle et $m-1<0$,
c'est à dire si et seulement si m appartient à $\left]-3;\dfrac{2}{3}\right[$ et $m<1$.
c'est à dire si et seulement si m appartient à $\left]-3;\dfrac{2}{3}\right[$.
Finalement,
$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ (m-1)x^2-4mx+m-6<0 \text{ si et seulement si } m\in\left]-3;\dfrac{2}{3}\right[}.$

Exercice 1

1. Résoudre $2x^4+x^2-6=0$.
On pose $U=x^2$.
L'équation devient $2U^2+U-6=0$.
$\Delta=b^2-4ac=1+4\times2\times6=49=7^2>0$.
$U_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-7}{2\times2}=-2$. $\qquad U_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+7}{2\times2}=\dfrac{3}{2}$.
D'où $x^2=\dfrac{3}{2}$ ou $x^2=-2$.
L'équation $x^2=\dfrac{3}{2}$ donne $x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.
L'équation $x^2=-2$ n'a pas de solution réelle (un carré est toujours positif).
$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } 2x^4+x^2-6=0 \text{ sont donc } -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \text{ et } \dfrac{\sqrt{6}}{2}.}$

2. Résoudre $x^4+4x^2-5=0$.
On pose $U=x^2$.
L'équation devient $U^2+4U-5=0$.
$\Delta=b^2-4ac=16+4\times5=36=6^2>0$.
$U_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-6}{2}=-5$. $\qquad U_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+6}{2}=1$.
D'où $x^2=-5$ ou $x^2=1$.
L'équation $x^2=-5$ n'a pas de solution réelle (un carré est toujours positif).
L'équation $x^2=1$ donne $x=-1$ ou $x=1$.
$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } x^4+4x^2-5=0 \text{ sont donc } -1 \text{ et } 1.}$