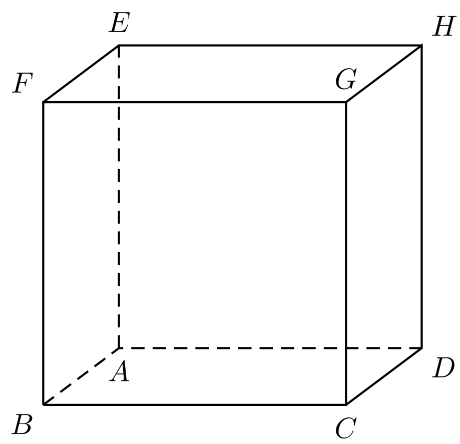
Chapitre 6 : Géométrie dans l'espace (Première partie)

I Positions relatives de droites et plans de l'espace

Définition
1. Deux droites de l'espace sont coplanaires si elles sont situées dans un même plan.
2. Deux droites sont parallèles si elles sont confondues ou si elles sont coplanaires et n'ont pas de point commun.
3. Deux plans sont parallèles s'ils sont confondus ou n'ont pas de point commun.
4. Une droite est parallèle à un plan si elle est contenue dans le plan ou si elle n'a pas de point commun avec le plan.

Exercice 1
Soit un cube $ABCDEFGH$.

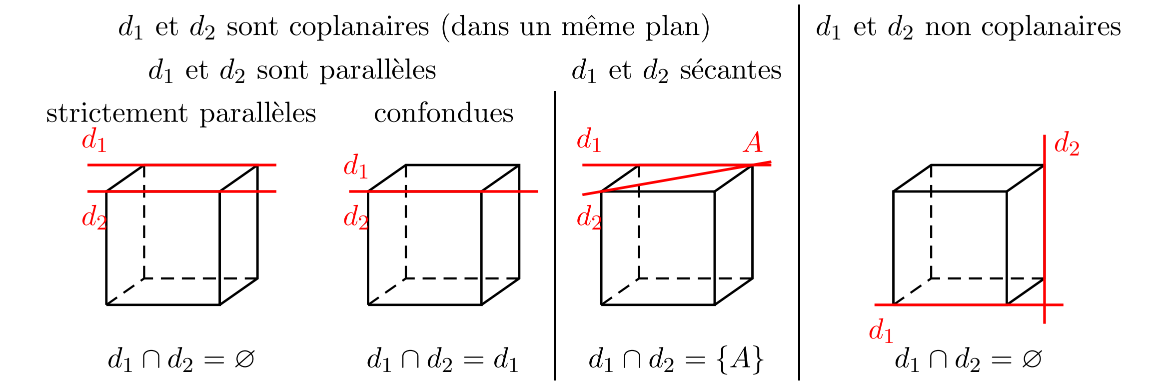


1. Citer deux droites situées dans le plan $(EFGH)$:
   ....
2. Citer deux droites non coplanaires :
   ....
3. Citer des droites parallèles à la droite (AD) :
   ....
4. Citer deux plans parallèles :
   ....
5. Citer deux plans non parallèles (sécants) :
   ....
6. Citer des droites parallèles au plan $(ABCD)$:
   ....
7. Citer des droites qui ne sont pas parallèles au plan $(ABCD)$:
   ....
8. Citer des plans parallèles à la droite (FG) :
   ....

Remarque
Si deux points distincts A et B sont dans un plan, alors toute la droite (AB) est incluse dans le plan.

I.1 Positions relatives de deux droites

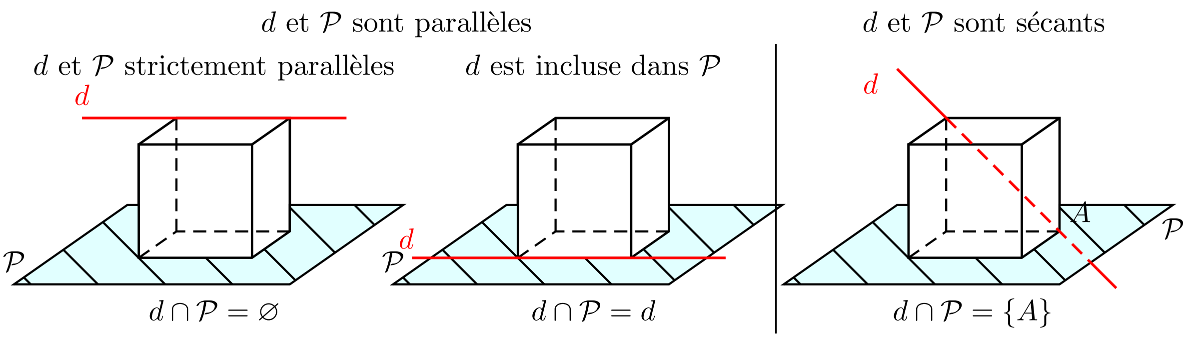
Propriété
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.



I.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

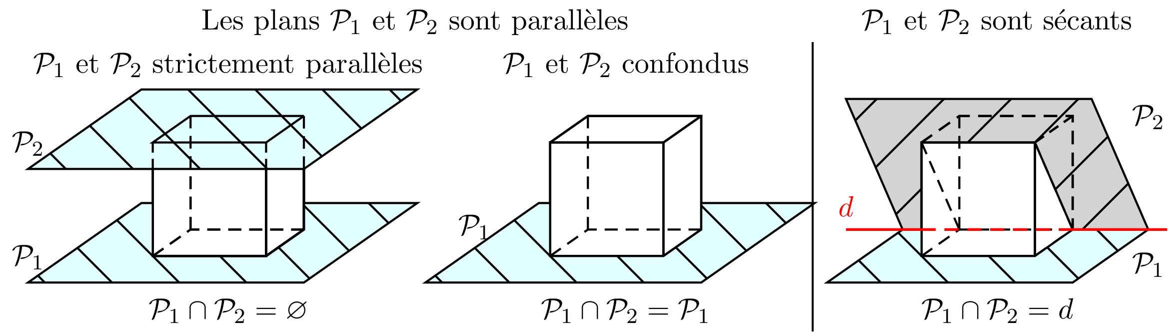
Définition
Une droite est parallèle à un plan si elle est parallèle à une droite de ce plan.

Propriété
Une droite et un plan de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.



I.3 Positions relatives de deux plans

Propriété
Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.

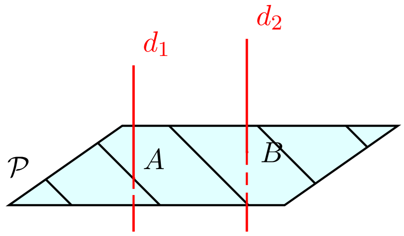


II Parallélisme dans l'espace

II.1 Parallélisme de droites

Propriété

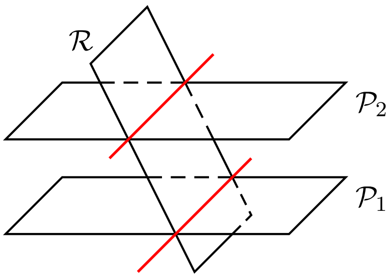
1. Si deux droites sont parallèles, alors toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
2. Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupe l'autre.



II.2 Parallélisme de plans

Propriété (admise)

1. Si deux plans sont parallèles, alors tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
2. Si deux droites sécantes d'un plan P_1 sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan P_2, alors les plans P_1 et P_2 sont parallèles.
3. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles.
   Si $\mathcal{R}$ est un plan sécant avec $\mathcal{P}_1$, alors
   — $\mathcal{R}$ est aussi sécant avec $\mathcal{P}_2$,
   — et les droites d'intersection de $\mathcal{R}$ avec $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

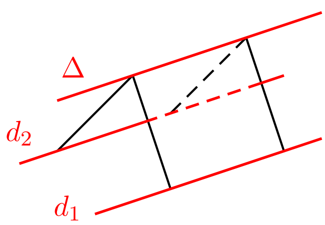


II.3 Parallélisme d'une droite et d'un plan

Théorème (théorème du toit)
Si

— les droites d_1 et d_2 sont parallèles,
— d_1 est contenue dans le plan $\mathcal{P}_1$, d_2 est contenue dans le plan $\mathcal{P}_2$,
— les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ,

alors,
la droite Δ d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est parallèle à d_1 et à d_2.



Démonstration
Soit A un point de Δ et $\mathscr{D}$ la droite passant par A et parallèle à d_1.
On a $\mathscr{D}//d_1$, et comme A est dans P_1, la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans P_1.
De plus, comme $\mathscr{D}//d_1$ et $d_1//d_2$, on a aussi $\mathscr{D}//d_2$.
De même, on montre que la droite $\mathscr{D}$ est incluse dans P_2.
On en déduit que $\mathscr{D}$ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.
Donc $\mathscr{D}$ est confondue avec Δ.
Ainsi, la droite Δ est bien parallèle à d_1 et d_2. □

Conséquence
Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à la droite d'intersection des deux plans.

III Orthogonalité dans l'espace

III.1 Droites orthogonales

Définition
On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si leurs parallèles respectives menées par un même point sont perpendiculaires.

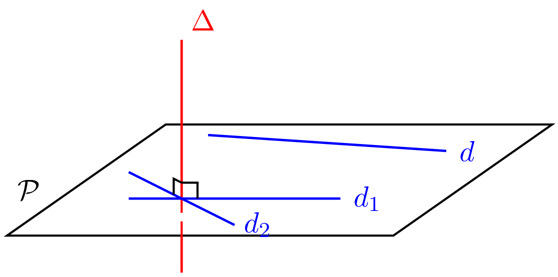
Remarque
Deux droites perpendiculaires sont à la fois orthogonales et sécantes.

Propriété
Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

III.2 Orthogonalité entre une droite et un plan

Définition
Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Théorème
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.



Démonstration (à connaître)
On montre l'équivalence suivante :
Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de plan.
La démonstration utilise le produit scalaire.

1. Implication directe :
   Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
   Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, et Δ une droite orthogonale à d_1 et à d_2.
   Considérons des vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}$ de d_1, $\overrightarrow{u_2}$ de d_2 et $\overrightarrow{v}$ de Δ.
   Comme $\Delta \perp d_1$, on a $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_1}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$.
   De même, $\Delta \perp d_2$, d'où $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u_2}$, et donc $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$.
   Comme d_1 et d_2 sont sécantes dans $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$. Autrement dit $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2})$ est une base de $\mathcal{P}$ (famille de vecteurs directeurs).
   Soit d une droite quelconque de $\mathcal{P}$, montrons que $\Delta \perp d$.
   Considérons $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de d (donc $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$).
   Comme $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u_1}$ et u_2 sont coplanaires, $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et de $\overrightarrow{u_2}$:

   $$\text{Il existe des réels } a \text{ et } b \text{ tels que } \overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}.$$

   Alors, par linéarité du produit scalaire,

   $$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} & = & \overrightarrow{v} \cdot (a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) \\ & = & a\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u_2} \\ & = & a \times 0 + b \times 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

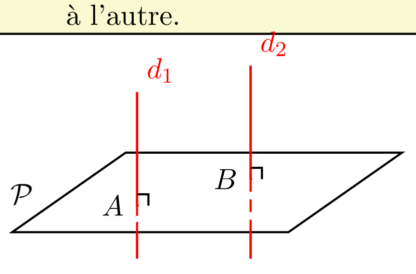
   Ainsi, $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$.
   Comme les doites Δ et d ont des vecteurs directeurs orthogonaux, elles sont orthogonales.
   $\Delta \perp d$.
2. Réciproque :
   Si une droite est orthogonale à toutes les droites d'un plan, alors elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
   Cette réciproque est évidente. □

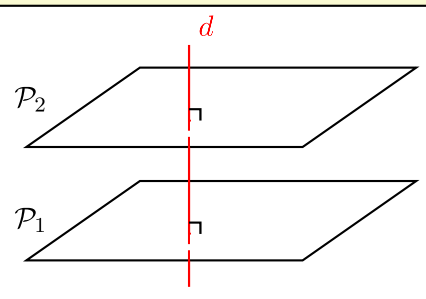
Remarque

Pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut montrer que l'une est orthogonale à un plan contenant l'autre.

Propriété

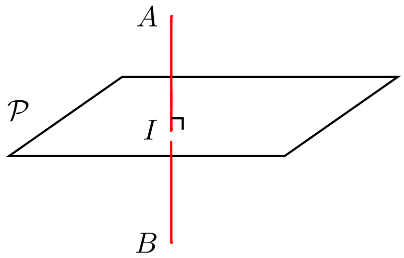
1. Il existe une unique droite passant par un point A donné et perpendiculaire à un plan donné.
2. Il existe un unique plan perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.
3. Si deux droites sont perpendiculaires à un même plan, alors elles sont parallèles entre elles.
4. Si deux droites sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
5. Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.





III.3 Plan médiateur de deux points distincts

Définition
Soient A et B deux points distincts de l'espace.
Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu I de $[AB]$ et perpendiculaire à la droite (AB).



Propriété
Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

Remarque
C'est l'extension à l'espace de la médiatrice d'un segment dans le plan.

Exercice 2 (Étude du tétraèdre régulier)
On considère un tétraèdre régulier $ABCD$ (les arêtes sont toutes de même longueur).
On note I le milieu de $[CD]$ et J le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que $(AB) \perp (CD)$:
   (a) sans utiliser la notion de plan médiateur,
   (b) en utilisant un plan médiateur.
2. Montrer que (IJ) est la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).
3. Qu'a-t-on montré au cours de cet exercice ?

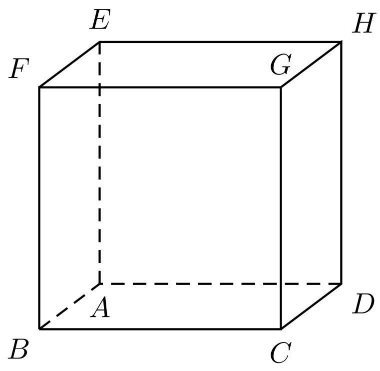
Remarque
Si deux droites d_1 et d_2 sont non coplanaires, alors il existe une unique perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

III.4 Plans perpendiculaires

L'orthogonalité entre deux plans n'est pas au programme de Terminale S.

Définition
Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Exemple :
Dans le cube ci-contre, la droite (CG) est perpendiculaire au plan $(ABCD)$.
Tout plan contenant la droite (CG) est un plan orthogonal au plan $(ABCD)$.
En particulier, les plans $(HGCD)$ et $(ABCD)$ sont orthogonaux (mais aussi $(EGCA)$ et $(ABCD)$).



IV Exercices

Exercice 3

Soit un cube $ABCDEFGH$. On note J le centre de la face $(BCGF)$, K le centre de la face $(CDHG)$, et I le milieu de $[AB]$. Étudier les positions relatives des droites :

— (KJ) et (DB)

— (AE) et (IF)

— (AB) et (FC)