

Repérage dans l'espace

I Repère de l'espace

Définition

Une base de l'espace est un triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**.

Propriété

Soit $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
On dit que $(x; y; z)$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Démonstration

1. Existence.

Soient O et A deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

La droite Δ passant par A dirigée par $\vec{k}$ coupe le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ en un point H .

Comme H et O sont dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$, il existe des réels x, y tels que $\overrightarrow{OH} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Comme A et H appartiennent à la droite Δ (dirigée par $\vec{k}$), il existe un réel z tel que $\overrightarrow{HA} = z\vec{k}$.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{OA} \\ &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} \\ &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\end{aligned}$$

2. Unicité.

Considérons deux combinaisons linéaires d'un même vecteur $\vec{u}$:

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Par soustraction, on a alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$.

Comme les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, on en déduit que

$$\begin{cases} x - x' = 0 \\ y - y' = 0 \\ z - z' = 0 \end{cases}, \text{ d'où } (x = x', y = y', \text{ et } z = z').$$

La décomposition de $\vec{u}$ suivant les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ est unique. □

Définition

Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ où O est un point, et $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace.

Propriété (et définition)

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe unique triplet de réels $(x; y; z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On dit que x est l'abscisse de M , y son ordonnée et z sa cote (sans accent).

Remarque

Le point M a les mêmes coordonnées que le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Propriété Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace.

1. $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $(x = x', y = y' \text{ et } z = z')$.
2. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

Propriété

Soient A et B deux points donnés par leurs coordonnées $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Alors :

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

2. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

II Représentation paramétrique d'une droite

Définition (et théorème)

Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

La droite $\mathcal{D}$ passant par A et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ pour lesquels il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ce dernier système est appelé une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

Le réel t s'appelle le paramètre.

Démonstration

$M(x; y; z) \in \mathcal{D}$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

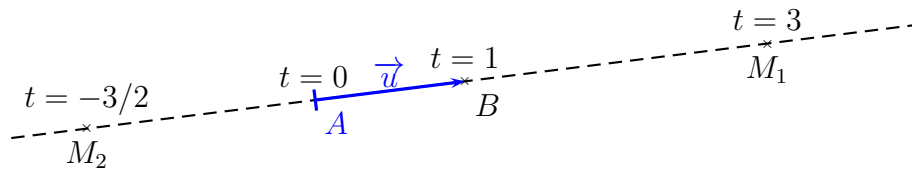
Donc $M \in \mathcal{D}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

or, $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$, et $t\vec{u} \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$.

D'où

$$\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}, \text{ et donc } \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}.$$

□

**Remarque**

1. À tout réel t , il correspond un unique point sur la droite $\mathcal{D}$ (par exemple, le point de paramètre $t = 0$ est A), et réciproquement à chaque point de la droite correspond une seule valeur de t .
2. Il existe une infinité d'équations paramétriques pour une même droite (ni le point A , ni le vecteur directeur $\vec{u}$ ne sont uniques).
3. Il est possible de paramétrer des parties de droite.

Par exemple, avec les notations précédentes, $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in [0; 1]$ est une représentation

du segment $[AB]$ où B est le point de paramètre 1.

Le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \geq 0$ représente la demi-droite $[AB)$.

Propriété

Réciproquement, pour tous réels α, β, γ , et a, b, c avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$, le système

$$\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(\alpha; \beta; \gamma)$ et dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque

Un système d'équation paramétrique étant donné, on peut lire facilement les coordonnées d'un point de la droite, et les coordonnées d'un vecteur directeur.

Exemple :
Le système

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est une équation paramétrique de la droite passant par le point $A(2; -1; 2)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

III Complément : représentation paramétrique d'un plan

Théorème (et définition)

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe des réels t et t' tels que

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

On dit que ce système est une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.

Propriété

Réciproquement, soient $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b',$ et c' des réels tels que $(a; b; c)$ ne soit pas proportionnel à $(a'; b'; c')$.

Alors le système

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}, t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique du plan passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigé par les vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Remarque

Un plan a une infinité de représentations paramétriques.