Chapitre 4 : Dérivation (2e partie)

I Rappels sur la dérivation

I.1 Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $a \in I$.

Soit $h \neq 0$. Taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.	$T(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Nombre dérivé de f en a :	$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Soit f dérivable en a. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite ...	passant par le point $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$
Équation de la tangente au point d'abscisse a	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

I.2 Fonction dérivée

Soient a, b, c, d quatre nombres réels.

Expression de la fonction $f(x)$ sur $\mathbb{R}$	Expression de la dérivée $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = a$ (fonction constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Exercice 1
Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5x^2 + x - 13$. $\qquad f'(x) = -10x + 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 2x + 1$. $\qquad g'(x) = x^2 - 12x + 2$.

II Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème
Soient u et v des fonctions dérivables sur un intervalle I, soit $k \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Somme de fonctions.
   La fonction $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
2. Produit par un nombre réel.
   Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction $(k \times u)$ est dérivable sur I et $(k \times u)' = k \times u'$.
3. Produit de fonctions.
   La fonction $(u \times v)$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$
4. Inverse et quotient.
   Si v ne s'annule pas sur I (c'est-à-dire pour tout $x \in I$, $v(x) \neq 0$), alors
   — la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$
   — la fonction $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et
   $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Démonstration (dérivée d'un produit de deux fonctions)
On suppose que u et v sont dérivables sur I.
On va montrer que $(u \times v)' = u'v + uv'$.
Soient $a \in I$, et $h \neq 0$.
$\dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h}$
$\dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$.
On admet le résultat suivant : toute fonction dérivable en a est continue en a.
On a alors $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$.
Ainsi,
$$\lim_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$
Donc $(u \times v)$ est dérivable sur I, et $(u \times v)' = u'v + uv'$. □

Exercice 2
Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = 8x^3 - 5x^2$ $\qquad f'(x) = 24x^2 - 10x$.
2. $f(x) = x^2(-2x + 3)$, de deux façons différentes
   a) En développant $f(x)$, on a $f(x) = -2x^3 + 3x^2$. $\qquad$ Donc $f'(x) = -6x^2 + 6x$.
   b) D'après la dérivée d'un produit $(u \times v)' = u'v + uv'$.
   $f'(x) = 2x(-2x + 3) + x^2 \times (-2) = -4x^2 + 6x - 2x^2 = -6x^2 + 6x$.

3. $f(x) = \dfrac{1}{6x-1}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{6}{(6x-1)^2}$.

4. $f(x) = \dfrac{3x+4}{1-2x}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{3(1-2x)-(3x+4)\times(-2)}{(1-2x)^2} = \dfrac{11}{(1-2x)^2}$

III Fonction dérivée de fonctions de référence

Exercice 3

Le but de cet exercice est de déterminer la dérivée de la fonction définie par $f(x) = x^5$.

1. Rappeler la formule de dérivée d'un produit de deux fonctions $(u \times v)$.
   $(u \times v)' = u'v + uv'$
2. On pose $u(x) = x^3$, $v(x) = x^2$, puis $f(x) = u(x) \times v(x)$.
   (a) On a alors $f(x) = x^3 \times x^2 = x^{3+2} = x^5$
   Comme $u(x) = x^3$, on a $u'(x) = 3x^2$
   Comme $v(x) = x^2$, on a $v'(x) = 2x$
   (b) D'après la propriété rappelée à la question 1,
   $f'(x) = 3x^2 \times x^2 + x^3 \times 2x = 3x^4 + 2x^2 = 5x^4$.

Théorème

1. Fonction puissance.
   Pour tout entier naturel non nul, la fonction f définie par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
2. Fonction inverse.
   La fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$,
   $$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$
3. Fonctions sinus et cosinus
   Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\sin'(x) = \cos x \text{ et}$$
   $$\cos'(x) = -\sin x.$$

Exercice 4

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^7 - 5x^4 + \dfrac{1}{2}x$ $\qquad f'(x) = 7x^6 - 20x^3 + \dfrac{1}{2}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^2$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + 2x$
3. $f(x) = 11\sin x - 2\cos x + 8x^5$
   $f'(x) = 11\cos x - 2 \times (-\sin x) + 8 \times 5x^4 = 11\cos x + 2\sin x + 40x^4$.
4. $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{9}$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{9}$.

IV Fonctions composées et dérivation

Exercice 5 (composée de fonctions $g(ax+b)$)

1. Dans chaque cas, donner l'expression de la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$.

(a) $a = 4$, $b = 7$, et $g(x) = x^3$. $\qquad f(x) = (4x+7)^3$

(b) $a = -3$, $b = 2$, et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{-3x+2}$

(c) $a = 2$, $b = -1$, et $g(x) = 7\cos x$. $\qquad f(x) = 7\cos(2x-1)$

2. Inversement, reconnaître l'expression $f(x)$ comme $g(ax+b)$ en précisant la fonction g et les réels a et b.

(a) $f(x) = (-8x+1)^4$ $\qquad g(x) = x^4$, $a = -8$, et $b = 1$

(b) $f(x) = \sin(2x-11)$ $\qquad g(x) = \sin x$, $a = 2$, et $b = -11$

(c) $f(x) = (-4x+5)^2$ $\qquad g(x) = x^2$, $a = -4$ et $b = 5$

(d) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{5}x + \pi\right)$ $\qquad g(x) = \cos x$, $a = \dfrac{1}{5}$ et $b = \pi$

Propriété (admise)
Soient a et b deux réels, et g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J.
Soit I un intervalle tel que pour tout $x \in I$, $ax+b \in J$.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = g(ax+b)$.
Alors, la fonction f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

Propriété (cas particulier des fonctions trigonométriques)
Soient A, ω, et φ des nombres réels (lire ω : "Omega", et φ : "Phi").
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$,
et $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$.
Alors f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$f'(t) = A \times \omega\cos(\omega t + \varphi)$
$g'(t) = -A \times \omega\sin(\omega t + \varphi)$.

Exercice 6

Dériver les fonctions précédentes.

1. (a) $f(x) = (4x+7)^3$ $\qquad f'(x) = 4 \times 3(4x+7)^2 = 12(4x+7)^2$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{-3x+2}$ $\qquad f'(x) = -3 \times \dfrac{-1}{(-3x+2)^2} = \dfrac{3}{(-3x+2)^2}$.

(c) $f(x) = 7\cos(2x-1)$ $\qquad f'(x) = 7 \times 2 \times (-\sin(2x-1)) = -14\sin(2x-1)$.

2. (a) $f(x) = (-8x+1)^4$ $\qquad f'(x) = -8 \times 4(-8x+1)^3 = -32(-8x+1)^3$

(b) $f(x) = \sin(2x-11)$ $\qquad f'(x) = 2 \times \cos(2x-11)$

(c) $f(x) = (-4x+5)^2$ $\qquad f'(x) = -4 \times 2(-4x+5) = -8(-4x+5) = 32x - 40$

(d) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{5}x + \pi\right)$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{5} \times (-\sin(\dfrac{1}{5}x + \pi)) = -\dfrac{1}{5}\sin(\dfrac{1}{5}x + \pi)$

V Approximation affine au voisinage d'un point

Rappel : Si f est dérivable en a, une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

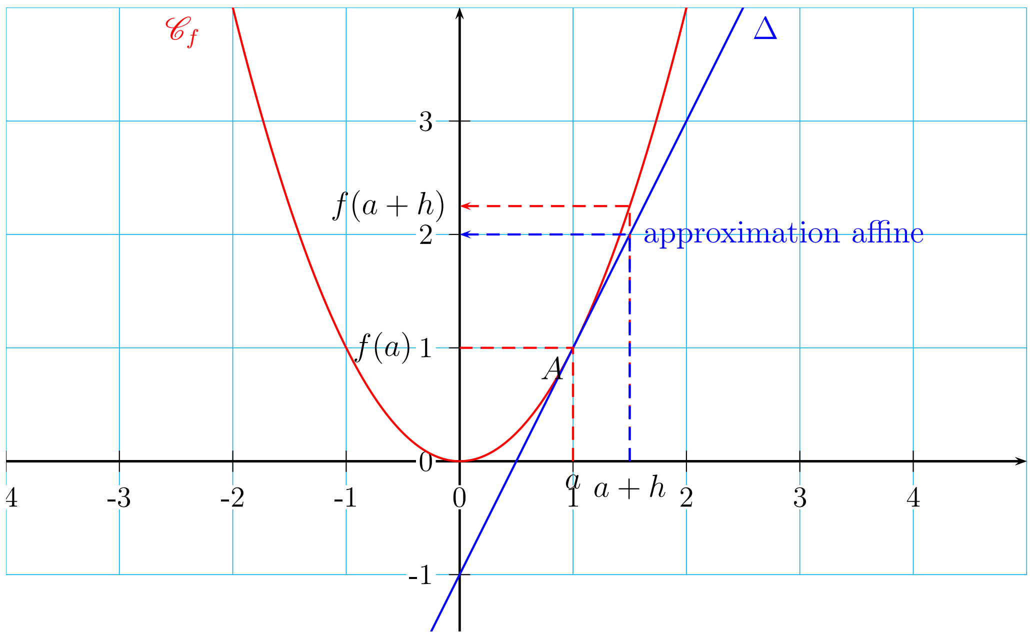
Si l'on souhaite approcher f par une fonction affine au voisinage de a, la meilleure fonction affine possible est donc $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$. D'où le résultat suivant :

Théorème
Si f est dérivable en a, alors :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } a,$$

$$(\text{ou } x = a+h) \qquad f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h \qquad \text{pour } h \text{ voisin de } 0.$$

Illustration :
Soit f la fonction carré, et $a = 1$. On a tracé la courbe de f, et la tangente Δ à la courbe au point A d'abscisse 1.



Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x$.

1. Déterminer l'approximation affine de f pour au voisinage de $a = 2$.
   Pour h proche de 0, on a donc $f(2+h) \approx f(2) + f'(2) \times h$.
   $f(2) = 3 \times 2^2 + 2 = 14$.
   Calculons aussi $f'(2)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x + 1$. Donc $f'(2) = 6 \times 2 + 1 = 13$.
   Ainsi, pour h proche de 0, $f(2+h) \approx 14 + 13h$.
2. Utiliser l'approximation affine de f pour donner une valeur approchée de $f(2,001)$, et $f(1,99)$. Comparer avec les valeurs exactes.
   $2,001 = 2 + 0,001$. Donc, avec $h = 0,001$ dans la relation qui précède,

$f(2,001) \approx 14 + 13 \times 0,001 = 14 + 0,013 = 14,013$.
Pour comparer, à la calculatrice, la valeur exacte est $f(2,001) = 14,013\,003$.
Pour $f(1,99)$, on prend $h = -0,01$, car $1,99 = 2 - 0,01$.
$f(1,99) \approx 14 + 13 \times (-0,01) = 14 - 0,13 = 13,87$.
Pour comparer, à la calculatrice, la valeur exacte est $f(2,001) = 13,870\,3$.

Exercice 7
Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0.
2. En déduire sans calculatrice une valeur approchée de $1,01^2$, $1,003^2$, puis $0,99^2$.

VI Dérivée et sens de variation

Théorème (rappel)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I
2. Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
3. Si f' est nulle sur I, alors f est constnate sur I.