1re G. Interrogation n° 7

Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 4 points)

Compléter sur l'énoncé :

1. Donner la définition d'une suite (V_n) géométrique.
   Une suite (V_n) est géométrique si l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre q.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n \times q$.
2. Terme général d'une suite arithmétique.
   Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 + n \times r$
3. Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   $$S = \frac{(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$$
4. Donner deux propriétés du cosinus ou du sinus d'un réel.
   Pour tout réel x,
   a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ b) $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$,et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Exercice 2 (4 points)

Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine 2000 unités seront produites, puis la production augmente de 10% chaque semaine. On note u_n le nombre de systèmes fabriqués la n-ième semaine (on a donc $u_1 = 2000$). On arrondira les résultats à l'unité.

1. Calculer u_2 et u_3.
   $u_2 = u_1 + 0,1 \times u_1 = 2000 + 0,1 \times 2000 = 2000 \times 1,1 = 2200$.
   $u_3 = u_2 + 0,1 \times u_2 = 2200 \times 1,1 = 2420$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction u_n pour tout entier $n \geqslant 1$. Que peut-on en déduire ?
   Pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $u_{n+1} = u_n + 0,1u_n = u_n \times (1 + 0,1) = 1,1 \times u_n$.
   Donc (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1,1$ et de premier terme $u_1 = 2000$
3. Exprimer u_n en fonction de n.
   Pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 2000 \times 1,1^{n-1}$.
4. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines.
   On cherche $S_{20} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.
   $S_{20} = u_1 \times \dfrac{1-q^{20}}{1-q} = 2000 \times \dfrac{1-1,1^{20}}{1-1,1} \approx 114550$.
   En 20 semaines, l'entreprise fabrique 114 550 systèmes d'alarme.

Exercice 3 (6 points)

Le salaire net de Monique est de 1600 euros en janvier 2013. Chaque mois il augmente de 9 euros.

On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2013, v_1 le salaire du mois de février 2013 et v_n le salaire du n^{e} mois après janvier 2013.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_{n+1} = v_n + 9.}$
2. En déduire la nature de la suite et préciser les éléments caractéristiques.
   $\boxed{(v_n) \text{ est la suite arithmétique de 1er terme } v_0 = 1600 \text{ et de raison } 9.}$
3. Exprimer v_n en fonction de n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ v_n = v_0 + nr = 1600 + 9n.}$
4. À quelle date le salaire de Monique dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
   $v_n \geqslant 2000$ ssi $1600 + 9n \geqslant 2000$, soit $9n \geqslant 400$, $n \geqslant \dfrac{400}{9} \approx 44,4$.
   Le plus petit entier n qui convient est $n = 45$.
   Or, $45 = 3 \times 12 + 9$.
   Le mois correspondant vient donc 3 ans et 9 moins après janvier 2013, c'est octobre 2016.
   $\boxed{\text{Le salaire dépasse 2000 euros pour la 1re fois le mois correspondant à } n = 45 \text{ soit en octobre 2016.}}$
5. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2013 à décembre 2023 inclus ?
   La période janvier 2013 à décembre 2023 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131} = v_0 + 131r = 1600 + 131 \times 9 = 2779$.
   $$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1600 + 2779}{2} \times 132 \\ &= 289\ 014 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2013-décembre 2023 est de 289 014 euros.}}$
6. Bonus : À partir de quelle date la somme totale des salaires dépasse-t-elle 300 000 euros ?
   Posons $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. On cherche le plus petit entier n tel

que $S_n > 300000$.

$$\begin{aligned} \frac{v_0+v_n}{2}\times(n+1) &> 300000 \\ (1600+1600+9n)(n+1) &> 600000 \\ (9n+3200)(n+1) &> 600000 \\ 9n^2+3209n+3200-600000 &> 0 \\ 9n^2+3209n-596800 &> 0 \end{aligned}$$

$\Delta = b^2-4ac = 3209^2-4\times 9\times(-596800) = 3178481 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \approx -491,5$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{Delta}}{2a} \approx 134,9$. Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, ici $a=9>0$.

Donc le plus petit entier (naturel) n tel que $9n^2+3209n-596800>0$ est 135.

$135 = 11\times 12+3$. Le mois correspondant vient 11 ans et 3 mois après janvier 2013, c'est donc avril 2024.

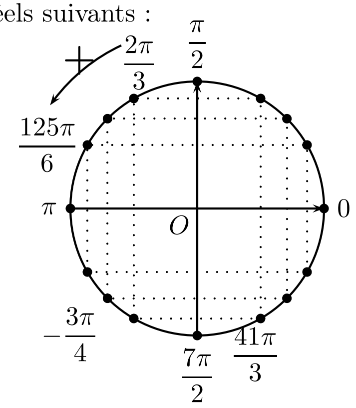
$\boxed{\text{La somme des salaires dépasse 300 000 euros pour la première fois en avril 2024.}}$

Exercice 4 (2 points)

Placer sur le cercle ci-contre les images des réels suivants :

$0\,;\pi\,;\dfrac{\pi}{2}\,;\ \dfrac{2\pi}{3}\,;$

$\dfrac{7\pi}{2}\,;\ \dfrac{-3\pi}{4}\,;\ \dfrac{41\pi}{3}\,;\ \dfrac{125\pi}{6}$. Aucune justification n'est demandée.



$\dfrac{7\pi}{2} = \dfrac{8\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2} = 2\times 2\pi-\dfrac{\pi}{2}$, il a la même image que $-\dfrac{\pi}{2}$.

$\dfrac{41\pi}{3} = \dfrac{42\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3} = 7\times 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$.

$\dfrac{125\pi}{6} = \dfrac{120\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6} = 10\times 2\pi+\dfrac{5\pi}{6}$

Exercice 5 (1 point)

Étudier si x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique. Justifier.

x et y ont la même image sur le cercle ssi $x-y$ est un multiple de 2π.

1. $x = -\dfrac{17\pi}{4}$ et $y = \dfrac{15\pi}{4}$.

   $x-y = -\dfrac{17\pi}{4}-\dfrac{15\pi}{4} = \dfrac{32\pi}{4} = 8\pi = 4\times 2\pi$.

   $\boxed{x \text{ et } y \text{ ont la même image sur le cercle.}}$

2. $x = \dfrac{7\pi}{9}$ et $y = \dfrac{52\pi}{9}$.

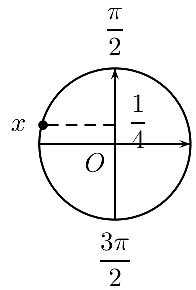
   $x-y = \dfrac{7\pi}{9}-\dfrac{52\pi}{9} = -\dfrac{45\pi}{9} = -5\pi$, qui n'est pas un multiple de 2π (car -5 est impair).

   $\boxed{x \text{ et } y \text{ n'ont pas la même image sur le cercle.}}$

Exercice 6 (3 points)

Soit x le réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x = \dfrac{1}{4}$.

1. Placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$.

   Donc $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = 1-\dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

   Ainsi, $\cos x = \sqrt{\dfrac{15}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ ou bien $\cos x = -\sqrt{\dfrac{15}{16}} = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

   Comme x appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \leqslant 0$.

   Finalement, $\boxed{\cos x = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}.}$

1re G. Interrogation n° 7 Correction du sujet 2

Exercice 7 (cours, 4 points)
Compléter sur l'énoncé :

1. Donner la définition d'une suite (u_n) arithmétique.
   Une suite (u_n) est arithmétique si l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant par un même nombre r.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
2. Terme général d'une suite géométrique.
   Soit (u_n) la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 \times q^n$. ....
3. Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1.

$$S = (\text{premier terme})\frac{1-(\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1-\text{raison}}$$

4. Donner deux propriétés du cosinus ou du sinus d'un réel.
   Pour tout réel x,
   a) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ b) $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$,et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Exercice 8 (2 points)
Au début d'une l'expérience, la masse des bactéries mesurée dans une solution aqueuse est de 3 mg. On estime que la masse de bastéries augmente de 40 % tous les jours. On pose $B_0 = 3$ et on note B_n la masse de bactéries au bout du n-ième jour, en mg.

1. Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_{n+1} = B_n + 0{,}4 \times B_n = 1{,}4 \times B_n.}$
2. En déduire l'expression de B_n en fonction de n. Justifier.
   Donc (B_n) est la suite géométrique de premier terme $B_0 = 3$ et de raison 1,4.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ B_n = B_0 \times q^n = 3 \times 1{,}4^n.}$
3. Déterminer la masse de bactéries présente au bout de 7 jours.
   $B_7 = 3 \times 1,4^7 \approx 31,6$.
   $\boxed{\text{Au bout de 7 jours, la masse des bactéries est d'environ 31,6 mg.}}$

Exercice 9 (2 points)
Calculer $T = 1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{5}\right)^{12}$. Donner la valeur exacte et le résultat arrondi à 0,000 1 près.
T est une somme de termes d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
Il y a 13 termes puisqu'on va de $\left(\frac{2}{5}\right)^0$ à $\left(\frac{2}{5}\right)^{12}$.

$$\boxed{T = 1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{13}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3} \times \left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{13}\right) \approx 1,6667.}$$

Exercice 10 (6 points)
Le salaire net de Jeanne était de 1750 euros en janvier 2017. Chaque mois il augmente 7 de euros.
On appelle v_0 le salaire du mois de janvier 2017, v_1 le salaire du mois de février 2017 et pour tout $n \geqslant 0$, v_n le salaire du n^{e} mois après janvier 2017.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = v_n + 7$.
2. Nature de la suite. Eléments caractéristiques.
   (v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1750$ et de raison 7
3. Exprimer v_n en fonction de n. Justifier.
   Donc pour tout $n \geqslant 0$, $v_n = v_0 + nr = 1750 + 7n$.
4. À quelle date le salaire de Monique dépassera-t-il pour la première fois 2000 euros ?
   $v_n \geqslant 2000$ ssi $1750 + 7n \geqslant 2000$ ssi $n \geqslant \frac{250}{7} \approx 35,7$.
   Le plus petit entier n qui convient est 36, ce qui correspond au mois de janvier 2020.
   En effet, $36 = 3 \times 12$.
   Le salaire dépasse pour la première fois 2 000 euros en janvier 2020.
5. Quelle somme totale percevra-t-elle comme salaire de janvier 2017 à décembre 2027 inclus ?
   La période janvier 2017 à décembre 2027 correspond à exactement 11 années, soit $11 \times 12 = 132$ mois.
   Il s'agit donc de calculer la somme des 132 premiers termes de la suite (v_n), de v_0 à v_{131}.
   $v_{131} = v_0 + 131r = 1750 + 131 \times 7 = 2667$.

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \cdots + v_{131} &= \frac{v_0 + v_{131}}{2} \times 132 \\ &= \frac{1750 + 2667}{2} \times 132 \\ &= 291\,522 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Le montant total des salaires accumulés sur la période janvier 2017-décembre 2027 est de 291 522 euros.}}$

6. Bonus : À partir de quelle date la somme totale des salaires dépasse-t-elle 300 000 euros ?

Posons $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. On cherche le plus petit entier n tel que $S_n > 300000$.

$$\begin{aligned}
\frac{v_0+v_n}{2}\times(n+1) &> 300000\\
(1750+1750+7n)(n+1) &> 600000\\
(7n+3500)(n+1) &> 600000\\
7n^2+3507n+3500-600000 &> 0\\
7n^2+3507n-596500 &> 0
\end{aligned}$$

$\Delta = b^2-4ac = 3507^2-4\times7\times(-596500) = 29001049 > 0$.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \approx -635,2$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \approx 134,2$. Le trinôme prend le signe de a à l'extérieur des racines, ici $a = 7 > 0$.

Donc le plus petit entier (naturel) n tel que $7n^2+3507n-596500 > 0$ est 135.

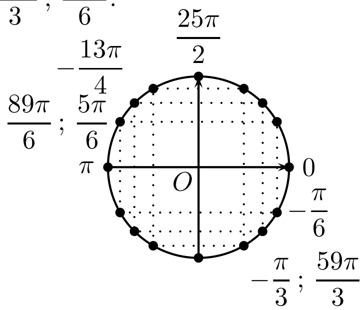
$135 = 11\times12+3$. Le mois correspondant vient 11 ans et 3 mois après janvier 2017, c'est donc avril 2028.

$\boxed{\text{La somme des salaires dépasse 300 000 euros pour la première fois en avril 2028.}}$

Exercice 11 (5 points)

Placer sur le cercle ci-dessous les images des réels suivants. Aucune justification n'est demandée.

1. $0\,;\pi\,;-\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{6}\,;$
2. $\dfrac{25\pi}{2}\,;\,-\dfrac{13\pi}{4}\,;\,\dfrac{59\pi}{3}\,;\,\dfrac{89\pi}{6}$.



Exercice 12 (1 point)

Étudier si x et y ont la même image sur le cercle trigonométrique. Justifier.

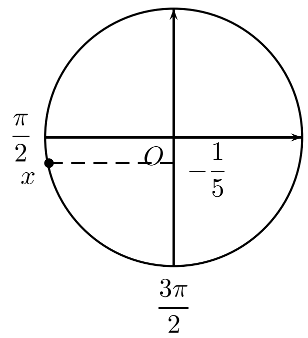
x et y ont la même image sur le cercle ssi $x-y$ est un multiple de 2π.

1. $x = -\dfrac{51\pi}{2}$ et $y = \dfrac{5\pi}{2}$.
   $x-y = -\dfrac{51\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{2} = -\dfrac{56\pi}{2} = -28\pi = -14\times2\pi$.
   $\boxed{x \text{ et } y \text{ ont la même image sur le cercle.}}$
2. $x = \dfrac{7\pi}{9}$ et $y = \dfrac{34\pi}{9}$.
   $x-y = \dfrac{7\pi}{9}-\dfrac{34\pi}{9} = -\dfrac{27\pi}{9} = -3\pi$, qui n'est pas un multiple de 2π (car -3 est impair). $\boxed{x \text{ et } y \text{ n'ont pas la même image sur le cercle.}}$

Exercice 13 (3 points)

Soit x le réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, tel que $\sin x = -\dfrac{1}{5}$.

1. Placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Déterminer la valeur exacte de $\cos x$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$.
   Donc $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 = 1-\dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$.
   Ainsi, $\cos x = \sqrt{\dfrac{24}{25}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$ ou bien $\cos x = -\sqrt{\dfrac{24}{25}} = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.
   Comme x appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, on a $\cos x \leqslant 0$.
   Finalement, $\boxed{\cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}.}$