Terminale STI. Correction du DM4 de spécialité

Exercice 1

Soient les nombres complexes $z_1 = 5 - i5\sqrt{3}$ et $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mettre z_1 sous forme exponentielle. Justifier.
   $z_1 = 5 - i5\sqrt{3}$ est sous forme algébrique $a + ib$ avec $a = 5$ et $b = -5\sqrt{3}$.
   $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5^2 + (-5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 25 \times 3} = \sqrt{100} = 10$.
   $\cos\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.
   $\sin\theta = \dfrac{b}{r} = \dfrac{-5\sqrt{3}}{10} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc un argument est $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.
   $\boxed{\text{Sous forme exponentielle, } z_1 = 10e^{-i\frac{\pi}{3}}.}$
2. Mettre z_2 sous forme algébrique. Justifier.
   $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ a pour module $r = 3$ et argument $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.
   $z_2 = 3\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = 3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
   $\boxed{\text{Sous forme algébrique, } z_2 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.}$
3. Déterminer la forme exponentielle de $z_1 \times z_2$.
   On reprend les formes exponentielles de z_1 et z_2.
$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= 10e^{-i\frac{\pi}{3}} \times 3e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= 3 \times 10e^{i(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} \\ &= 30e^{i(\frac{-7\pi}{12})} \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{Une forme exponentielle est } z_1 z_2 = 30e^{i\times(\frac{-7\pi}{12})}.}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+1)e^{-2x}$.

1. Déterminer les limites de f (en $+\infty$ et $-\infty$).
   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$.
   $\boxed{\text{Par produit, } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.
   C'est une forme indéterminée (du type "$\pm\infty \times 0$").
   $\boxed{\text{Par croissance comparée (l'exponentielle l'emporte sur le polynôme), } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$
2. Montrer que $f'(x) = (-6x+1)e^{-2x}$. On rappelle la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$.
   Ici, on pose $u(x) = 3x+1$, donc $u'(x) = 3$.
   Et $v(x) = e^{-2x}$ donc $v'(x) = -2e^{-2x}$.
   En effet, par propriété du cours, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est $x \mapsto ke^{kx}$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{-2x} + (3x+1) \times (-2e^{-2x}) \\ &= e^{-2x}(3 - 6x - 2) \\ &= (-6x+1)e^{-2x} \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{On a bien } f'(x) = (-6x+1)e^{-2x}.}$
3. Déterminer le tableau de variation de f. Justifier.
   Comme $e^{-2x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le même signe que $-6x+1$.
   Or, $-6x+1 = 0$ ssi $x = \dfrac{1}{6}$, et $-6x+1 > 0$ ssi $x < \dfrac{1}{6}$.

x	$-\infty$		$1/6$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1,5e^{-1/3}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{1}{6}\right) = \left(3 \times \frac{1}{6} + 1\right)e^{-2\times\frac{1}{6}} = 1,5e^{-1/3}.$$

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 15$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

$2y' + y = 15$ ssi $y' = -\dfrac{1}{2}y + 7,5$.
Les solutions sont les fonctions de la forme
$f(x) = ke^{-0,5x} - \dfrac{7,5}{-0,5} = ke^{-0,5x} + 15$, avec $k \in \mathbb{R}$.
De plus, $f(0) = 1$, donc $ke^0 + 15 = 1$, puis $k \times 1 = 1 - 15$ et $k = -14$.

$\boxed{\text{La solution de cette équation diffférentielle est la fonction } f \text{ définie par } f(x) = -14e^{-0,5x} + 15.}$