

Terminale STL. Spécialité. Correction du ds5

Exercice 1 (questions de cours, 2 points)

- On pose $f(x) = e^{11x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 11e^{11x}$
- Soit $k > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

Exercice 2 (4 points)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^3 + 5x^2 + x - 11$
La limite à l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^3 + 5x^2 + x - 11 = \lim_{-\infty} -6x^3 = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} -6x^3 + 5x^2 + x - 11 = \lim_{+\infty} -6x^3 = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5)e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5) = \lim_{-\infty} 3x = -\infty. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5)e^{-x} = -\infty}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 5 + e^{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{4x} = 0.$$

$$\boxed{\text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 5 + e^{4x} = +\infty.}$$

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x + 2}{e^{2x}}$.

$$1. \text{ Calculer } f'(x) \text{ et montrer que } f'(x) = \frac{-10x + 1}{e^{2x}}$$

On rappelle la dérivée d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Ici, on pose $u(x) = 5x + 2$, donc $u'(x) = 5$.

Et $v(x) = e^{2x}$ donc $v'(x) = 2e^{2x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5e^{2x} - (5x + 2) \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^{2x}[5 - (10x + 4)]}{e^{2x} \times e^{2x}} \\ &= \frac{-10x + 1}{e^{2x}} \end{aligned}$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f (sans les limites en $-\infty$ et $+\infty$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$. Donc $f'(x)$ a le même signe que $-10x + 1$.

$-10x + 1 > 0$ si $-10x > -1$ ssi $x < 0,1$.

x	$-\infty$	$0,1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$2,5e^{-0,2}$	0

$$f(0,1) = \frac{5 \times 0,1 + 2}{e^{2 \times 0,1}} = 2,5e^{-0,2}.$$

À noter : les limites en complément (ce n'était pas dans l'interrogation)

En $+\infty$.

$\lim_{+\infty} 5x + 2 = +\infty$, et $\lim_{+\infty} e^{2x} = +\infty$ (par quotient, on ne peut pas conclure, F.I.)

Par croissance comparée, $\lim_{+\infty} f = 0$

En $-\infty$.

$\lim_{-\infty} 5x + 2 = -\infty$, et $\lim_{-\infty} e^{2x} = 0+$

Par quotient, $\lim_{-\infty} f = -\infty$