Chapitre 6 : Fonctions affines

I Définition et représentation graphique d'une fonction affine

Définition
Une fonction f est affine s'il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout x réel $f(x) = ax + b$.
On peut toujours définir une fonction affine sur $\mathbb{R}$.

Exemple : la fonction f donnée par $f(x) = 2x + 3$.

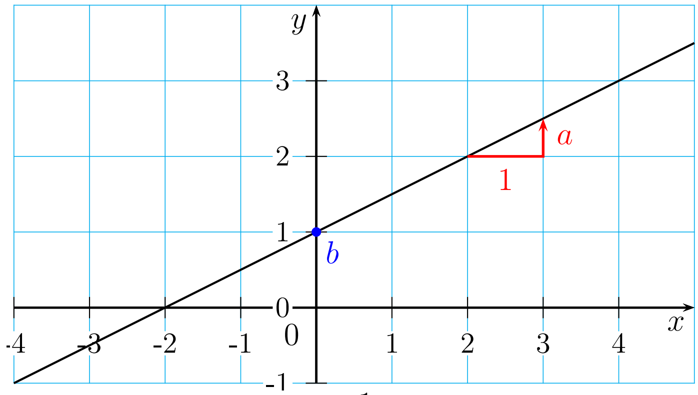
Théorème
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Démonstration (utilisant les vecteurs colinéaires)
Soit $f(x) = ax + b$.
$f(0) = b$. Donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0; b)$.
$f(1) = a + b$. Donc $\mathscr{C}_f$ passe par le point $B(1; a + b)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.
Soit x un nombre réel, alors $f(x) = ax + b$.
Le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x est $M(x; ax + b)$.
Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les points A, B et M sont alignés.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} xy' - yx' &= 1 \times ax - a \times x \\ &= ax - ax \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$).
Ainsi, $M \in (AB)$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x; ax + b)$ est aligné avec A et B, la courbe représentative de f est la droite (AB). □

Vocabulaire :
Soit f définie par $f(x) = ax + b$.
- Le réel a est le coefficient directeur de la courbe représentative de f.
  « quand on avance de 1, on "monte" de a ».
- le réel b est l'ordonnée à l'origine. :
  La droite passe par le point de coordonnées $(0; b)$.



$f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$

Méthode pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine :
Comme c'est une droite, il suffit de construire deux points.
- On choisit deux valeurs de x, (qui donnent des calculs simples si possible)
- on calcule les images correspondantes,
- on place les points obtenus, et on trace la droite les reliant.

Exercice 1
Tracer la courbe de la fonction définie par $f(x) = -\dfrac{2}{5}x + 3$.

x	0	5
y	...	...

Remarque
Cas particuliers :
- Lorsque $a = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = b$.
  La fonction est dite constante. La courbe de f est alors un droite parallèle à l'axe des abscisses.
- Lorsque $b = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
  La fonction est dite linéaire. La courbe de f est une droite passant par O.

II Sens de variation d'une fonction affine

Théorème (sens de variation des fonctions affines)
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, avec a et b réels
1. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a > 0$.
2. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ssi $a < 0$.
3. f est constante sur $\mathbb{R}$ ssi $a = 0$. Dans ce cas, $\mathscr{C}_f$ une droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 2
Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction affine : ressource 2166

Propriété
Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Pour tous nombres réels distincts u et v,

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = a.$$

Méthode pour déterminer l'expression d'une fonction affine f dont on connaît la représentation graphique :

— Repérer deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sur $\mathscr{C}_f$.

— Le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

— Alors, $f(x) = ax + b$, et a est connu. On trouve b en remplaçant les coordonnées d'un des points A ou B dans la relation précédente.

Exercice 3
Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction affine f.

1. $f(2) = 5$ et $f(3) = 1$.
2. La courbe de f passe par $A(-2; 3)$ et $B(1; 4)$.

III Signe de $ax + b$

Théorème
Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, avec $a \neq 0$.
Alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

— Si $a > 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$-$	0	$+$	

— Si $a < 0$, alors le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		$+$	0	$-$	

Exercice 4
Compléter le tableau de signes d'une fonction affine : ressource 2543

Exemple :

1. $f(x) = 2x - 6$.
   $a = 2$, et $b = -6$.
   $2x - 6 = 0$ lorsque $x = 3$.
   Comme $a = 2 > 0$, on a :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$2x-6$		$-$	0	$+$	

2. $g(x) = 2 - 7x$.
   $a = -7$, $b = 2$.
   $2 - 7x = 0$ ssi $x = \dfrac{2}{7}$.
   Comme $a = -7 < 0$, on a :

x	$-\infty$		$2/7$		$+\infty$
$2-7x$		$+$	0	$-$	

Propriété (« règle des signes »)
Le produit (ou quotient) de deux nombres positifs est positif.
Le produit (ou quotient de deux nombres négatifs est positif.
Le produit (ou quotient) de deux nombres de signes contraires est négatif.

Méthode pour les inéquations

1. Faire apparaître 0,
2. Factoriser (mettre au même dénominateur s'il y a des divisions),
3. Faire un tableau de signe (une ligne pour chaque facteur),
4. Conclure (donner l'ensemble solution sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles).

Exercice 5
Résoudre l'inéquation $6x < 2x^2$.

$$\begin{aligned} 6x &< 2x^2 \\ 6x - 2x^2 &< 0 \\ x(6-2x) &< 0 \end{aligned}$$

Valeurs clés :
$x = 0$

$6-2x=0$ lorsque $x=3$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$6-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(6-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\text{L'ensemble solution est } S =]-\infty;0[\ \cup\ ]3;+\infty[.}$

Exercice 6
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x+5}{x} \leqslant 4$.

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x} &\leqslant 4 \\ \frac{x+5}{x} - 4 &\leqslant 0 \\ \frac{x+5}{x} - \frac{4x}{x} &\leqslant 0 \\ \frac{x+5-4x}{x} &\leqslant 0 \\ \frac{5-3x}{x} &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Valeurs clés :
$5-3x=0$ lorsque $x=\dfrac{5}{3}$.
$x=0$ (valeur interdite).

x	$-\infty$		0		$5/3$		$+\infty$
$5-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5-3x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S = \left]-\infty;0\right[\ \cup\ \left[\frac{5}{3};+\infty\right[.}$$

Exercice 7
Déterminer le signe d'un produit de fonctions affines : ressource 2544

Exercice 8
Inéquation du second degré en trouvant une factorisation : ressource 2923