

Terminale STI. Spécialité. Correction du ds4.

Sujet 1

Exercice 1 (questions de cours, 2 points)

- On pose $f(x) = e^{11x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 11e^{11x}$
- Soit $k > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{kx} = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{kx} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^5 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^5 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^4 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^4 = -\infty$

Exercice 2 (2 points)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^3 + 5x^2 + x - 11$
La limite à l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} -6x^3 + 5x^2 + x - 11 = \lim_{-\infty} -6x^3 = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -6x^3 + 5x^2 + x - 11 = \lim_{+\infty} -6x^3 = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5)e^{-x}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5) = \lim_{-\infty} 3x = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

Par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5)e^{-x} = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 5)e^{-x}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 5) = \lim_{+\infty} 3x = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

On a une forme indéterminée " $0 \times \pm\infty$ ".

Par croissance comparée, l'exponentielle l'emporte, donc
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5)e^{-x} = 0$

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x+1}{e^x}$.

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x + 1 = \lim_{+\infty} 4x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x + 1 = \lim_{-\infty} 4x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0+$$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{-4x+3}{e^x}$

On rappelle la dérivée d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Ici, on pose $u(x) = 4x + 1$, donc $u'(x) = 4$.

Et $v(x) = e^x$ donc $v'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4e^x - (4x+1) \times e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x[4 - (4x+1)]}{e^x \times e^x} \\ &= \frac{-4x+3}{e^x} \end{aligned}$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation complet de f .

Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-4x + 3$.

$$-4x + 3 = 0 \text{ ssi } x = \frac{3}{4}, \text{ et } -4x + 3 > 0 \text{ ssi } x < \frac{3}{4}.$$

$$f(x) = \frac{4x+1}{e^x}, \text{ donc } f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4 \times 0,75 + 1}{e^{3/4}} = 4e^{-3/4}.$$

On ajoute aussi les limites dans la ligne de $f(x)$ du tableau de variation.

x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$4e^{-3/4}$	0

Quelques réponses non détaillées du sujet 2

Exercice 2 (2 points)

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 6x^3 + 5x^2 + x - 11 = -\infty$ par le terme de plus haut degré
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^3 + 5x^2 + x - 11 = +\infty$ par le terme de plus haut degré
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 5)e^{4x} = 0$ par croissance comparée
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 5)e^{4x} = -\infty$ par produit

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x+2}{e^{2x}}$.

$$f'(x) = \frac{-10x+1}{e^{2x}}$$

x	$-\infty$	0, 1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$2, 5e^{-0,2}$	0