Correction de l'interrogation n° 7
Sujet 1

Exercice 1 (11 points)

1. Compléter :
   (a) Soit (u_n) est une suite **arithmétique** de raison r et de premier terme u_1.
   Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
   (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite
   géométrique de raison différente de 0 et de 1.
   Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et distincte de 1.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
2. Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 3$ et de raison 6.
   (a) Calculer V_{20}.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $V_n = V_0 + nr$.
   $V_{20} = V_0 + 20r = 3 + 20 \times 6 = 123$.
   (b) Calculer $S_{20} = V_0 + V_1 + \cdots + V_{20}$.
   $S_{20} = \dfrac{(V_0 + V_{20}) \times 21}{2} = \dfrac{(3+123) \times 21}{2} = 63 \times 21 = 1323$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Exprimer en fonction de n, $T_n = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \cdots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
   C'est une somme de termes consécutifs de la suite géométrique de 1er terme $1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ et de raison $\dfrac{2}{3}$.
   Il y a $(n+1)$ termes puiqu'on va de $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ à $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   $$T_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$
   Il et clair que pour tout entier n, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} \geqslant 0$, et donc
   $\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leqslant 1$, puis $T_n \leqslant 3$.
   Donc (T_n) est majorée par 3.
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $T_n \geqslant 2,9999$. Justifier.
   La suite (T_n) est strictement croissante puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} > 0$.
   On observe que $T_{25} \approx 2,999881 < 2,9999$, et $T_{26} \approx 2,999921 > 2,9999$.
   L'entier cherché est donc 26.

Exercice 2 (9 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1000$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 90$.

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = 0,9 \times 1000 + 90 = 990$.
   $u_2 = 0,9 \times 990 + 90 = 981$.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = u_n - 900$
   (a) Calculer V_0 et V_1.
   $V_0 = u_0 - 900 = 100$.
   $V_1 = u_1 - 900 = 90$.
   (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
   $$\begin{aligned} V_{n+1} &= u_{n+1} - 900 \\ &= 0,9u_n + 90 - 900 \\ &= 0,9u_n - 810 \\ &= 0,9(V_n + 900) - 810 \\ &= 0,9V_n + 810 - 810 \\ &= 0,9V_n \end{aligned}$$
   Donc (V_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de 1er terme $V_0 = 100$.

(c) Exprimer V_n en fonction de n.
$V_n = V_0 \times q^n = 100 \times 0,9^n$.

3. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = u_n - 900$, soit $u_n = V_n + 900$.
Donc $u_n = 100 \times 0,9^n + 900$.

4. Soit $n \geqslant 0$.
Déterminer l'expression en fonction de n de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n}(100 \times 0,9^k + 900) \\ &= (\sum_{k=0}^{n} 100 \times 0,9^k) + \sum_{k=0}^{n} 900 \\ &= 100 \times \frac{1-0,9^{n+1}}{1-0,9} + 900 \times (n+1) \\ &= 1000(1-0,9^{n+1}) + 900 \times (n+1) \end{aligned}$$

Exercice 3 (3 points)
Le directeur sportif d'un club de football professionnel souhaite recruter un joueur pour la saison à venir. Il recherche un attaquant qui marque au moins un but par match 7 fois sur 10.
Il rencontre un agent de joueur qui lui propose Diego dont il gère la carrière.
Lors de la saison précédente, Diego, qui se trouvait dans un autre club, a marqué au moins un but dans 20 matchs sur les 38 jouées. On fait l'hypothèse qu'il marque au moins un but par match 7 fois sur 10. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de matchs où il marque au moins un but dans la saison (soit sur les 38 matchs joués). On admet que les performances sont indépendantes d'un match à l'autre.

1. On répète 38 épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = 0,7$ (on considère que le "succès" est que Diego marque au moins un but). La variable X qui compte le nombre de matchs où Diego marque au moins un but suit la loi binomiale $\mathscr{B}(38; 0,7)$.

2. Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ est $a = 21$.
En effet, $P(X \leqslant 20) \approx 0,018$, et $P(X \leqslant 21) \approx 0,039$.
Le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ est $b = 32$.
En effet, $P(X \leqslant 31) \approx 0,964$, et $P(X \leqslant 32) \approx 0,986$.
$\frac{a}{n} = \frac{21}{38} \approx 0,55$, et $\frac{b}{n} = \frac{32}{38} \approx 0,84$.
Un intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 95% est $I = [0,55; 0,84]$.

3. Au regard des résultats de Diego la saison précédente, quelle sera la décision du directeur sportif ?
$f = \frac{20}{38} \approx 0,53 \notin I$.
On peut rejeter l'hypothèse selon laquelle Diego marque au moins un but par match 7 fois sur 10, avec un risque d'erreur d'environ 5 %.
Le directeur sportif devrait choisir de ne pas le recruter.

4. Cette fois, on considère une variable aléatoire X qui sit la loi binomiale $\mathscr{B}(40; 0,7)$.
Le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a)$ est $a = 22$.
En effet, $P(X \leqslant 21) \approx 0,015$, et $P(X \leqslant 22) \approx 0,032$.
Le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ est $b = 33$.
En effet, $P(X \leqslant 32) \approx 0,945$, et $P(X \leqslant 33) \approx 0,976$.
$\frac{a}{n} = \frac{22}{40} = 0,55$, et $\frac{b}{n} = \frac{33}{40} = 0,825$.
Un intervalle de fluctuation des fréquences au seuil de 95% est $I_2 = [0,55; 0,825]$. $f_2 = \frac{23}{40} \approx 0,575$.
$f_2 \in I_2$. Dans ce cas, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle l'attaquant marque au moins un but par match 7 fois sur 10.
Le directeur sportif peut donc envisager de recruter un tel attaquant.

Réponses du Sujet 2

Exercice 4 (11 points)

1. Compléter :
   (a) Soit (u_n) est une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0.
   Pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 \times q^n$.
   (b) Donner une formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.
   $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \dfrac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$.
2. Soit (V_n) la suite arithmétique de premier terme $V_0 = 4$ et de raison 5.
   (a) Calculer V_{20}. $V_{20} = 104$
   (b) Calculer $S_{20} = V_0 + V_1 + \cdots + V_{20}$.
   $S = 1134$.
3. Soit un entier $n \geqslant 1$.
   (a) Exprimer en fonction de n, $T_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, et en déduire (T_n) est majorée par 1.
   $T_n = 1 - 0,5^n$. Donc $T_n \leqslant 1$.
   (b) Déterminer le plus petit entier n tel que $T_n \geqslant 0,9999$. Justifier.
   L'entier est $n = 14$.

Exercice 5 (9 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2000$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

1. Calculer u_1 et u_2.
   $u_1 = 1650$. $u_2 = 1370$.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par $V_n = u_n - 250$
   (a) Calculer V_0 et V_1.
   $V_0 = 1750$, $V_1 = 1400$.
   (b) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
   $V_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0,8(V_n + 250) + 50 - 250 = 0,8V_n$.
   (c) Exprimer V_n en fonction de n.
   $V_n = V_0 \times q^n = 1750 \times 0,8^n$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = 1750 \times (0,8)^n + 250$.
   $u_n = V_n + 250 = 1750 \times (0,8)^n + 250$.
4. Soit $n \geqslant 0$.
   Déterminer l'expression en fonction de n de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   $S_n = 1750 \times \dfrac{1 - 0,8^{n+1}}{1 - 0,8} + 250 \times (n+1) = 8750 \times (1 - 0,8^{n+1}) + 250 \times (n+1)$.

Exercice 6 (bonus, 3 points)

Le directeur sportif d'un club de football professionnel souhaite recruter un joueur pour la saison à venir. Il recherche un attaquant qui marque au moins un but par match 6 fois sur 10.
Il rencontre un agent de joueur qui lui propose Diego dont il gère la carrière.
Lors de la saison précédente, Diego, qui se trouvait dans un autre club, a marqué au moins un but dans 16 matchs sur 38 joués.
On fait l'hypothèse qu'il marque au moins un but par match 6 fois sur 10. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de matchs où il marque au moins un but dans une saison, soit 38 matchs joués. On admet que les performances sont indépendantes d'un match à l'autre.

1. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(38; 0,6)$.
2. $a = 17$ et $b = 29$, $I = [0,447; 0,763]$.
3. $f = \dfrac{16}{38} \approx 0,421 \notin I$.
   on rejette l'hypothèse selon laquelle il marque au moins un but par match 6 fois sur 10 avec un risque d'erreur de 5 %.
   Il ne devrait pas choisir Diego.
4. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(40; 0,6)$. $a = 18$ et $b = 30$, $I' = [0,45; 0,75]$.
   $f' = \dfrac{19}{40} = 0,475 \in I'$.
   On ne peut pas rejeter le modèle $p = 0,6$, le directeur sportif peut envisager de recruter ce joueur.