

2de. Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1

1. Effectuer les calculs suivants :

$$A = 123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2. \quad B = 58^2 - 57^2 - 56^2 + 55^2 \quad C = 87^2 - 86^2 - 85^2 + 84^2$$

On obtient $A = B = C = 4$.

2. Énoncer une conjecture et la démontrer.

Conjecture : il semble que pour tout nombre réel x , $x^2 - (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 = 4$.

Démonstration.

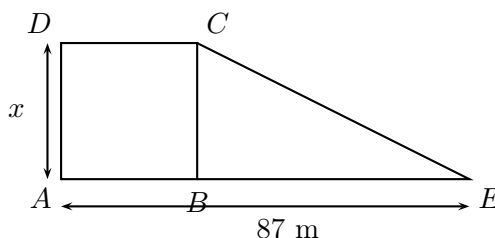
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^2 - (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 &= x^2 - (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4) + (x^2 - 6x + 9) \\ &= x^2 - x^2 + 2x - 1 - x^2 + 4x - 4 + x^2 - 6x + 9 \\ &= -1 - 4 + 9 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - (x-1)^2 - (x-2)^2 + (x-3)^2 = 4$.

Exercice 2

Pour quelle valeur de x l'aire du carré $ABCD$ est-elle égale à l'aire du triangle BEC ? Justifier.



L'aire du carré $ABCD$ est $f(x) = x^2$.

L'aire du triangle BEC rectangle en B est $g(x) = \frac{b \times h}{2} = \frac{BE \times BC}{2} = \frac{(87-x)x}{2}$.

Le carré et le triangle ont la même aire ssi $f(x) = g(x)$.

D'où $x^2 = \frac{(87-x)x}{2}$ ssi $2x^2 = 87x - x^2$ ssi $3x^2 - 87x = 0$ ssi $x(3x - 87) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $3x - 87 = 0$) ssi ($x = 0$ ou $x = 29$). D'après le contexte, on ne garde pas la solution $x = 0$.

Le carré $ABCD$ et le triangle BEC ont la même aire lorsque $x = 29$ m.

Exercice 3

Soit $f(x) = x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3)$.

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3) \\ &= x^2 - 16 - [-6x^2 + 9x - 24x + 36] \\ &= x^2 - 16 - (-6x^2 - 15x + 36) \\ &= x^2 - 16 + 6x^2 + 15x - 36 \\ &= 7x^2 + 15x - 52 \end{aligned}$$

2. Montrer que $f(x) = (x+4)(7x-13)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3) \\ &= (x+4)(x-4) - 3(x+4)(-2x+3) \\ &= (x+4)[(x-4) - 3(-2x+3)] \\ &= (x+4)(x-4+6x-9) \\ &= (x+4)(7x-13) \end{aligned}$$

On pouvait aussi développer $(x+4)(7x-13)$ pour retrouver la forme de $f(x)$ développée obtenue à la question 1.

3. Calculer $f(-4)$.

$$f(-4) = (-4 + 4) \times (7 \times 4 - 13) = 0 \times 15 = 0.$$

4. Choisir la bonne expression pour résoudre les équations suivantes :

(a) $f(x) = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

On part donc de l'expression factorisée.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ (x + 4)(7x - 13) &= 0 \\ x + 4 = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 13 = 0 \\ x = -4 \quad \text{ou} \quad 7x = 13 \\ x = -4 \quad \text{ou} \quad x = \frac{13}{7} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -4 et $\frac{13}{7}$.

(b) $f(x) = -52$.

On part de l'expression développée réduite car elle permet de factoriser une fois qu'on a fait apparaître 0 d'un côté du signe égal :

$$\begin{aligned} f(x) &= -52 \\ 7x^2 + 15x - 52 &= -52 \\ 7x^2 + 15x &= 0 \\ x(7x + 15) &= 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.

Donc $x = 0$ ou $7x + 15 = 0$.

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{15}{7}.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = -52$ sont 0 et $-\frac{15}{7}$.

Exercice 4

Au moment de passer en caisse, une boutique propose l'offre suivante :

- Si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, on accorde une remise de 8 %.
- Si le montant des achats est strictement supérieur à 50 euros, on accorde une remise de 12 %.

1. Alice arrive en caisse avec un article affiché 48 euros. Combien va-t-elle payer ?

Comme le montant est inférieur à 50, elle a une remise de 8 %, donc $t = -0,08$.

$$y_2 = y_1 \times (1 + t) = 48 \times (1 - 0,08) = 48 \times 0,92 = 44,16.$$

Alice va payer 44,16 euros.

2. Béatrice a payé 74,8 euros après la remise. Quel était le montant initial de ses achats ?

Ici, $t = -0,12$ pour une remise de 12%.

$$y_1 = \frac{y_2}{1 + t} = \frac{74,8}{1 - 0,12} = \frac{74,8}{0,88} = 85.$$

Le montant des achats avant la remise était de 85 euros.

Compléter la fonction Python qui renvoie le prix à payer suivant le montant M des achats avant de passer en caisse.

```
def prix(M) :  
    if M<=50 :  
        p=M*0.92  
    else :  
        p=M*0.88  
    return(p)
```