Term G Spécialité. Correction du devoir maison n° 3

Exercice 1 (n° 58 p 98)

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.
   On cherche une relation du type $\overrightarrow{IJ} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{BF}$.
   Par le parallélépipède, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$.
   $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$.
   Ainsi, $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.
2. En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (BCG).
   D'aprs la question 1., la droite (IJ) est parallèle au plan (BCF) (qu'on peut aussi nommer (BCG)).
   Deux situations sont alors à envisager : (IJ) strictement parallèle au plan (BCG) ou (IJ) incluse dans le plan (BCG).
   Comme $I \notin (BCG)$, la droite (IJ) est strictement parallèle au plan (BCG).

Exercice 2 (n° 96 page 103)

d est la droite passant par $A(-1;2;2)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(1;0;3)$.
d' est la droite passant par $B(-4;5;7)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(-2;6;22)$.
M est le point de coordonnées $(-3;2;-4)$.

1. Montrons que $M \in d$.
   $\overrightarrow{AM}(x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A)$, soit $\overrightarrow{AM}(-2;0;-6)$.
   On remarque que $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{u}$, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, et $M \in d$.
2. De même, $\overrightarrow{BM}(1;-3;-11)$, et $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, donc $M \in d'$.
3. En déduire la position relative des droites d et d'.
   Il est clair que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. (car $1\times(-2) = -2$, et $0 \times (-2) = 0 \neq 6$)
   Donc d et d' ne sont pas parallèles.
   De plus elles ont un point en commun (le point M, d'après 1. et 2.).
   Donc d et d' sont sécantes en M.

Exercice 3 (n° 22 page 153)

On considère les points $M(2;-1;4)$ et $N(1;2;3)$.

1. Déterminons une équation paramétrique de la droite (MN).
   $\overrightarrow{MN}(x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - Z_M)$, soit $\overrightarrow{MN}(-1;3;-1)$.
   La droite (MN) est la droite passant par $M(2;-1;4)$ et dirigée par $\overrightarrow{MN}(-1;3;-1)$.
   Donc une représentation paramétrique de (MN) est :
   $$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
2. Soit $P(-1;4;-2)$. M, N, P sont-ils alignés ?
   Les points M, N et P sont alignés ssi $P \in (MN)$.
   On teste les coordonnées de P dans l'équation paramétrique.
   $$\begin{cases} -1 = 2 - t \\ 4 = -1 + 3t \\ -2 = 4 - t \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} t = 3 \\ 4 = -1 + 3 \times 3 \end{cases}, \textbf{ égalité fausse}.$$
   Aucune valeur de t ne convient pour que les coordonnées de P vérifient l'équation paramétrique de (MN).
   Donc $P \notin (MN)$. Les points M, N, P ne sont pas alignés.

Remarque :
On pouvait aussi traiter l'ex 96 p 103 à l'aide d'équations paramétriques.
Dans l'ex 22 p 153, pour étudier l'alignement des points M, N, P, on pouvait étudier la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.