Contrôle n° 8
Réponses du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

Compléter sur l'énoncé.

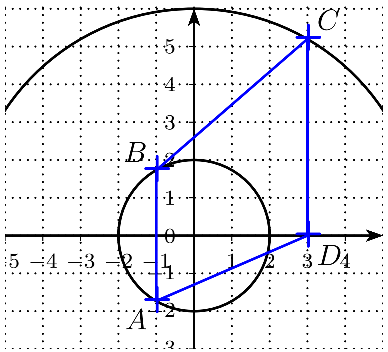
1. Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A etz_B dans le plan complexe.
   L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
   La distance AB est $|z_B - z_A|$
   Le milieu K du segment $[AB]$ a pour affixe $z_K = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
2. f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; 6]$.
   Compléter les sens de variations de f dans le tableau ci-dessous.

x	0		1		3		6
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Exercice 2 (6 points)

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :
$z_A = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = \left[2; \dfrac{2\pi}{3}\right]$, $z_C = 3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3}$, et $z_D = 3$.

1. Calculer le module et un argument de z_A et z_C.
   $r_A = |z_A| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$.
   $\cos\theta_A = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-1}{2}$. $\qquad \sin\theta_A = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $\theta_A = -\dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   $r_C = |z_C| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$.
   $\cos\theta_C = \dfrac{x}{r} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. $\qquad \sin\theta_C = \dfrac{y}{r} = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Donc $\theta_C = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   $\boxed{\text{Ainsi, } z_A = \left[2; -\dfrac{2\pi}{3}\right], \text{ et } z_C = \left[6; \dfrac{\pi}{3}\right].}$
2. Déterminer la forme algébrique de z_B.
   $x = r\cos\theta = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} = 2 \times \dfrac{-1}{2} = -1$.
   $y = r\sin\theta = 2\sin\dfrac{2\pi}{3} = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
   $\boxed{\text{Donc } z_B = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.}$
3. Placer les points A, B, C, D.



4. Montrer que $\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
   $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - (-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 3 + 3\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 = 3\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   On a donc $\dfrac{3}{2} z_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{3}{2} \times (2\mathrm{i}\sqrt{3}) = 3\mathrm{i}\sqrt{3} = z_{\overrightarrow{DC}}$.
   $\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}.}$
5. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$. Justifier.
   Comme $\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires, donc $(AB)//(DC)$. De plus les longueurs AB et DC ne sont pas égales.
   Le quadrilatère $ABCD$ a deux côtés opposés parallèles mais de longueurs différentes.
   $\boxed{ABCD \text{ est un trapèze.}}$

Exercice 3 (3 points)

Dans un repère orthonormé direct du plan, soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2 + 3\mathrm{i}$, $z_B = 2 + 4\mathrm{i}$ et $z_C = -1 + 7\mathrm{i}$.
Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.

$AB = |z_B - z_A| = |2+4\text{i} - (-2+3\text{i})| = |4+\text{i}| = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$.
$AC = |z{-}C{-}z_A| = |{-1}{+}7\text{i}{-}({-2}{+}3\text{i})| = |1{+}4\text{i}| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$.
$\boxed{\text{Donc } AB = AC\text{, et } ABC \text{ est isocèle en } A.}$

Exercice 4 (4 points)
Soit f la fonction définie sur $[-4;7]$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 3$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{f'(x) = -2x+6}$.
2. Déterminer le tableau de variation complet de f sur l'intervalle $[-4;7]$.
   $f'(x) = 0$ ssi $-2x+6 = 0$ ssi $x = 3$.
   Et $f'(x) > 0$ ssi $-2x+6 > 0$ ssi $x < 3$.

x	-4		3		7
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-43	$\nearrow$	6	$\searrow$	-10

3. Répondre sans justifier.
   (a) Combien de solutions l'équation $f(x) = -5$ admet-elle sur $[-4;7]$?
   $\boxed{\text{L'équation } f(x) = -5 \text{ admet deux solutions sur } [-4;7].}$
   (b) Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $-4 \leqslant x \leqslant 7$.
   $\boxed{\text{Lorsque } -4 \leqslant x \leqslant 7,\ -43 \leqslant f(x) \leqslant 6.}$

Exercice 5 (2 points)
Calculer la dérivée de la fonction suivante.

Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $g(x) = \dfrac{6x^2+x}{x+1}$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{(12x+1)(x+1)-(6x^2+x)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{6x^2+12x+1}{(x+1)^2}}.$$

Exercice 6 (4 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2;6]$ par $f(x) = -x^3+3x^2$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{f('x) = -3x^2+6x}$
2. Montrer que $f'(x) = 0$ si et seulement si ($x = 0$ ou $x = 2$).
   $f'(x) = 0$ ssi $-3x^2+6x = 0$ ssi $x(-3x+6) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $-3x+6 = 0$).
   $\boxed{\text{Donc } f'(x) = 0 \text{ ssi } (x = 0 \text{ ou } x = 2).}$
3. Compléter le tableau suivant (sans justifier).

x	-2		0		2		6
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variation de $f(x)$	20	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-108

Explication : $f'(x)$ est un trinôme du second degré, il prend le signe de a à l'extérieur des racines, et ici $a = -3 < 0$.

Exercice 7 (bonus, 1 point)
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On note A le point d'affixe $z_A = 1+\text{i}$.
Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-(1+\text{i})| = 4$? Justifier.
$|z-(1+\text{i})| = 4$ signifie que $AM = 4$.
L'ensemble des points M tels que $AM = 4$ est le cerlce de centre A et de rayon 4.
$\boxed{\text{Donc c'est le cercle de centre } A(1;1) \text{ et de rayon 4.}}$

Réponses du sujet 2

Exercice 8 (cours, 2 points)

Compléter sur l'énoncé.

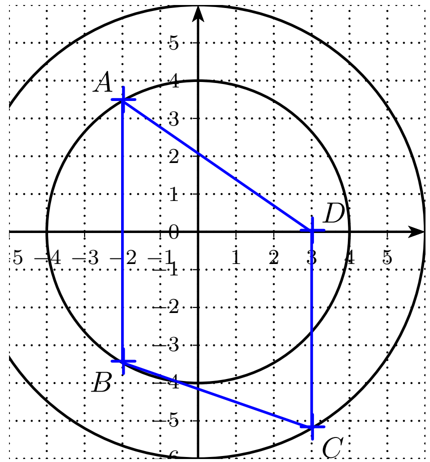
1. Si z a pour forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, le module de z est $\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.}$
2. Si z est un nombre complexe non nul de forme trigonométrique $z = [r; \theta]$ et de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$, alors $\boxed{x = r\cos\theta}$ et $\boxed{y = r\sin\theta.}$
3. f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; 6]$. Compléter les sens de variation de f dans le tableau ci-dessous.

x	0		2		5		6
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Exercice 9 (6 points)

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :
$z_A = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_B = \left[4; -\dfrac{2\pi}{3}\right]$, $z_C = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$, et $z_D = 3$.

1. Calculer le module et un argument de z_A et z_C.
$\boxed{z_A = \left[4; \dfrac{2\pi}{3}\right], \text{ et } z_C = \left[6; -\dfrac{\pi}{3}\right].}$
2. Déterminer la forme algébrique de z_B.
$x = r\cos\theta = 4\cos\dfrac{-2\pi}{3} = 4 \times \dfrac{-1}{2} = -2.$
$y = r\sin\theta = 4\sin\dfrac{-2\pi}{3} = 4 \times \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}.$
$\boxed{\text{Donc } z_B = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}.}$
3. Placer les points A, B, C, D.



4. Montrer que $\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} - (-2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}) = -4\mathrm{i}\sqrt{3}.$
$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3} - 3 = -3\mathrm{i}\sqrt{3}.$
On a donc $\dfrac{3}{4}z_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{3}{4} \times (-4\mathrm{i}\sqrt{3}) = -3\mathrm{i}\sqrt{3} = z_{\overrightarrow{DC}}.$
$\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}.}$
5. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$. Justifier.
Comme $\overrightarrow{DC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires, donc $(AB)//(DC)$. De plus les longueurs AB et DC ne sont pas égales.
Le quadrilatère $ABCD$ a deux côtés opposés parallèles mais de longueurs différentes.
$\boxed{ABCD \text{ est un trapèze.}}$

Exercice 10 (3 points)

Dans un repère orthonormé direct du plan, soient A,B et C les points d'affixes respectives $z_A = -2 + \mathrm{i}$, $z_B = 3 + 2\mathrm{i}$ et $z_C = -1 + 6\mathrm{i}$.
Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
$AB = |z_B - z_A| = |3 + 2\mathrm{i} - (-2 + \mathrm{i})| = |5 + \mathrm{i}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}.$
$AC = |z - C - z_A| = |-1 + 6\mathrm{i} - (-2 + \mathrm{i})| = |1 + 5\mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}.$
$\boxed{\text{Donc } AB = AC, \text{ et } ABC \text{ est isocèle en } A.}$

Exercice 11 (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[-4; 7]$ par $f(x) = x^2 - 4x - 3$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{f'(x) = 2x - 4.}$
2. Déterminer le tableau de variation complet de f sur l'intervalle $[-4; 7]$.
   $f'(x) = 0$ ssi $2x - 4 = 0$ ssi $x = 2$.
   Et $f'(x) > 0$ ssi $2x - 4 > 0$ ssi $x > 2$.

x	-4		2		7
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	29	$\searrow$	-7	$\nearrow$	18

3. Répondre sans justifier.
   (a) Combien de solution(s) l'équation $f(x) = 20$ admet-elle sur $[-4; 7]$?
   $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 20 \text{ admet une seule solution dans } [-4; 7].}$
   (b) Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $-4 \leqslant x \leqslant 7$.
   $\boxed{\text{Lorsque } -4 \leqslant x \leqslant 7,\ -7 \leqslant f(x) \leqslant 29.}$

Exercice 12 (2 points)
Calculer la dérivée de la fonction suivante.

Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $g(x) = \dfrac{3x^2 - 4}{x + 1}$.

$$\boxed{g'(x) = \frac{6x(x+1) - (3x^2 - 4) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}.}$$

Exercice 13 (4 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 10]$ par $f(x) = x^3 - 9x^2$.

1. Calculer $f'(x)$.
   $\boxed{f('x) = 3x^2 - 18x}$
2. Montrer que $f'(x) = 0$ si et seulement si ($x = 0$ ou $x = 6$).
   $f'(x) = 0$ ssi $3x^2 - 18x = 0$ ssi $x(3x - 18) = 0$ ssi ($x = 0$ ou $3x - 18 = 0$).
   $\boxed{\text{Donc } f'(x) = 0 \text{ ssi } (x = 0 \text{ ou } x = 6).}$
3. Compléter le tableau suivant (sans justifier).

x	-2		0		6		10
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variation de $f(x)$	-44	$\nearrow$	0	$\searrow$	-108	$\nearrow$	100

Exercice 14 (bonus, 1 point)
On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On note A le point d'affixe $z_A = 1 + \mathrm{i}$.
Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - (1 + \mathrm{i})| = 4$? Justifier.
$|z - (1 + \mathrm{i})| = 4$ signifie que $AM = 4$.
L'ensemble des points M tels que $AM = 4$ est le cerlce de centre A et de rayon 4.
$\boxed{\text{Donc c'est le cercle de centre } A(1; 1) \text{ et de rayon } 4.}$