1ère janvier 2022

DEVOIR-MAISON POUR SE PREPARER AU DEVOIR COMMUN

Exercice 1 :

On considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 7x - 6$

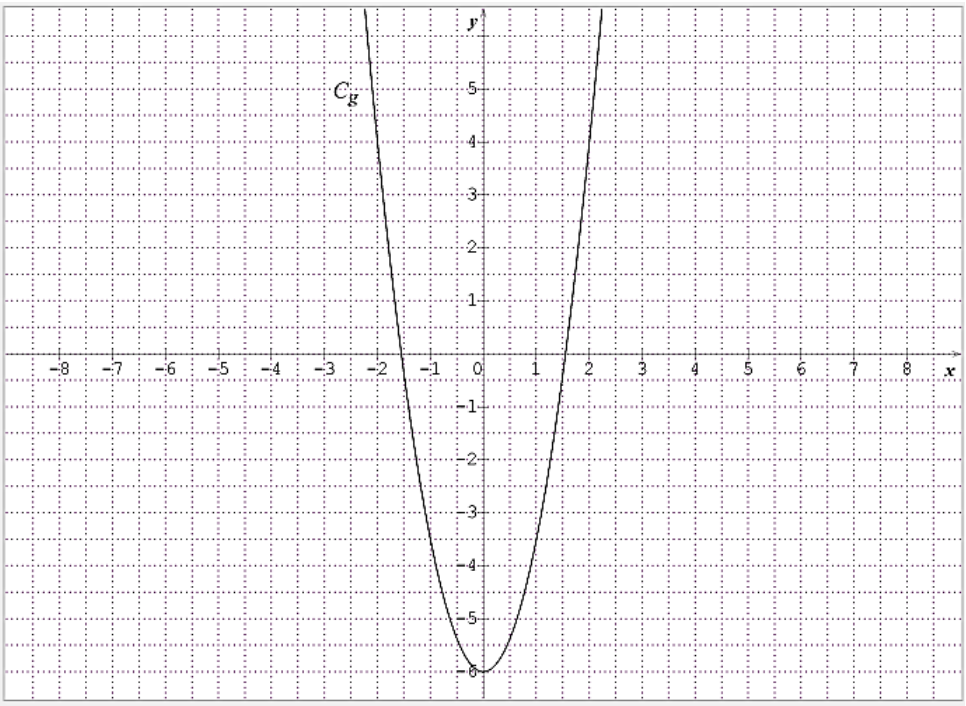
1. Déterminer les racines de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.

3. Dresser le tableau de signes de la fonction f

3. Déterminer le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

4. Construire C_f , la courbe représentative de la fonction f dans le repère ci-dessous.



5. On considère la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2{,}5x^2 - 6$ dont la représentation graphique est tracée ci-dessus. Déterminer algébriquement les valeurs de x pour lesquelles la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2

On considère la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^3 - x^2 - x + 1$

Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d'équation $y = -8x + 2$

On précisera l'abscisse des points de la tangente et leurs équations réduites respectives.

Exercice 3

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes sur l'intervalle I

$a)\ u(x) = \dfrac{1}{x^4}$ $\qquad I =]0; +\infty[$

$b)\ v(x) = 3\sqrt{x}$ $\qquad I =]0; +\infty[$

$c) w(x) = \dfrac{-2}{x}$ $\qquad I = \mathbb{R}^*$

$d)\ f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ $\qquad I = \mathbb{R}$

$e)\ g(x) = (5 - 6x)\sqrt{x}$ $\qquad I = \mathbb{R}$

$f)\ h(x) = (3x^2 - 5)(8 - x) \qquad I = \mathbb{R}$

$g)\ h(x) = (-4x + 5)^2 \qquad I = \mathbb{R}$

Exercice 4

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
On tire au hasard un cube de l'urne.
On note les événements :
B : "le cube est bleu"
R : "le cube est rouge"
C : "le cube a ses faces marquées d'un cercle"
L : "le cube a ses faces marqués d'un losange"
E : "le cube a ses faces marquées d'une étoile".

1. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
3. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
4. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
5. On suppose dans cette question que $x = 50$.
   Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Correction

Exercice 1

1. Déterminer les racines de f sur $[0;7]$.

L'expression $\left(-1x^2+7x-6\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=7 \\ c=-6 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=25>0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-1x^2+7x-6\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-7-\sqrt{25}}{-2}=6\in[0;7] \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-7+\sqrt{25}}{-2}=1\in[0;7]$$

2. En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.

$$f(x)=\underline{-(x-6)(x-1)}$$

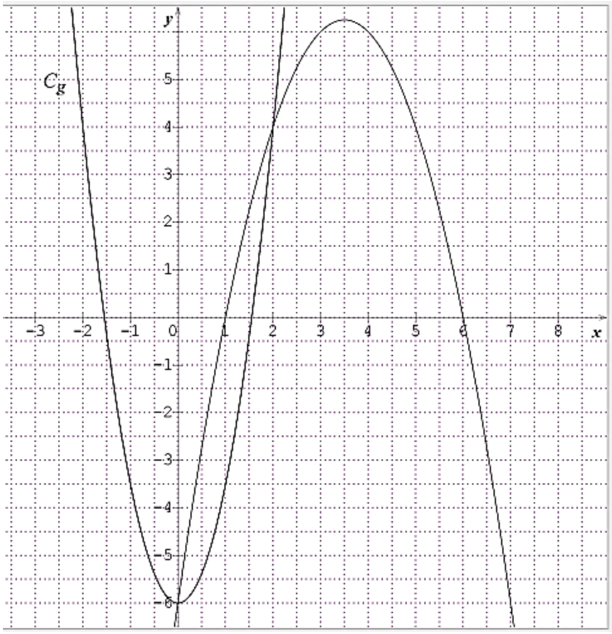
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

Le coefficient $a=-1$ étant négatif $f(x)$ est positif entre les racines et négatif ailleurs. Donc sur $[0;7]$:

x	0		1		6		7
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le coefficient $a=-1$ étant négatif, la fonction f est croissante sur $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{7}{2};7\right]$

x	0	$\frac{7}{2}$	7
Variations de f	-6 ↗	$\frac{25}{4}$	↘ -6



5. $g(x)-f(x)=3{,}5x^2-7x=3{,}5x(x-2)$

Le polynome admet deux racines : 0 et 2. Il est du signe de $a=3{,}5$ à l'extérieur de l'intervalle racines

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $g(x)-f(x)$		+	0	-	0	+	

C_g *est au dessus de* C_f *sur* $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

Exercice 2

$f(x) = -3x^3 - x^2 - x + 1$

$f'(x) = -9x^2 - 2x - 1$

Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur

On cherche a tel que $f'(a) = -8 \Leftrightarrow -9a^2 - 2a - 1 = -8 \Leftrightarrow -9a^2 - 2a + 7 = 0$

$\Delta = 256 > 0 \quad \textit{cette équation a deux solutions qui sont } \frac{7}{9} \textit{ et } -1$

Equation de la tangente en $x = -1$: $\boldsymbol{y = -8x - 4}$

Equation de la tangente en $x = \frac{7}{9}$: $\boldsymbol{y = -8x + \frac{1076}{243}}$

Exercice 3

$a)\ u'(x) = -\frac{4}{x^5}$

$b)\ v'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$c) w'(x) = \frac{2}{x^2}$

$d)\ f'(x) = -x^2 + 6x + 4$

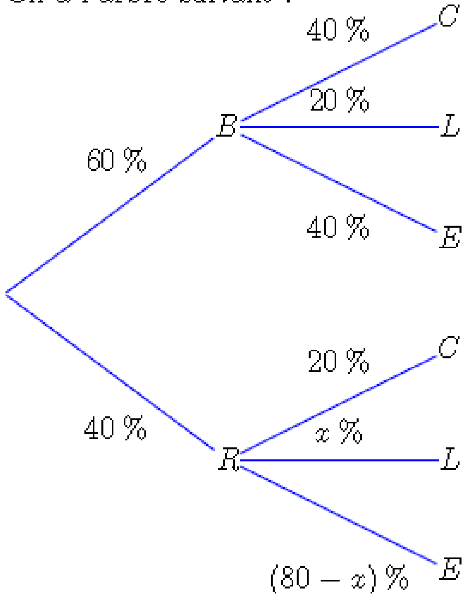
$e)\ g'(x) = -6\sqrt{x} + \frac{5 - 6x}{2\sqrt{x}} = -9\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$

$f)\ h'(x) = -9x^2 + 48x + 5$

$g)\ h(x) = -8(-4x + 5) = 32x - 40$

Exercice 4

1. Arbre pondéré.
   On a l'arbre suivant :



2. Déterminons $P(L)$.
   B et R forment une partiton de l'univers.
   D'après la formule des probablités totales, la probabilité que le cube soit marqué d'un losange est :
   $P(L) = P(B \cap L) + P(R \cap L) = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times \dfrac{x}{100} = 0,12 + 0,004x$.

3. Déterminons x pour que $P(L) = P(E)$.
   De même, avec la formule des probabilités, on exprime à $P(E)$.
   $P(E) = 0,6 \times 04 + 0,4 \times \dfrac{80-x}{100}$.
   $$\begin{aligned} P(L) = P(E) \quad & \text{ssi} \quad 0,12 + 0,004x = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times \frac{80-x}{100} \\ & \text{ssi} \quad 0,12 + 0,004x = 0,24 + 0,32 - 0,004x \\ & \text{ssi} \quad 0,008x = 0,44 \\ & \text{ssi} \quad x = 55 \end{aligned}$$
   La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile pour $x = 55$.

4. Les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » sont indépendants équivaut à $P_B(L) = P(L)$.
   Or, $P(L) = 0,12 + 0,004x$, et $P_B(L) = 0,2$ (direct d'après l'arbre).
   $0,12 + 0,004x = 0,2$ ssi $0,004x = 0,08$ ssi $x = \dfrac{0,08}{0,004}$ ssi $x = 20$ B et L sont indépendants pour $x = 20$.

5. Dans cette question on suppose que $x = 50$.
   $P_L(B) = \dfrac{P(L \cap B)}{P(L)} = \dfrac{0,6 \times 0,2}{0,12 + 0,004 \times 50} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$.
   La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est donc $0,375$.