1STI3 - Mathématiques spécialité
Correction du travail à distance n°3 pour le lundi 06 avril 2020.

Exercice 1 (50 page 241)

1. $f(x) = \sin(2x)$ sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2\cos(2x)$.
   On étudie le signe de $\cos(2x)$ lorsque $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Si $x = \dfrac{\pi}{4}$, alors $2x = \dfrac{\pi}{2}$, et $\cos(2x) = 0$.
   Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, alors $0 \leqslant 2x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, et donc $\cos(2x) \geqslant 0$.
   Si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, alors $\dfrac{\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant \pi$, et donc $\cos(2x) \leqslant 0$.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x) = 2\cos(2x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   $f(0) = \sin(0) = 0$; $f(\dfrac{\pi}{4}) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$, et $f(\dfrac{\pi}{2}) = \sin\pi = 0$.

2. $f(x) = \cos(3x)$ sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.
   Pour tout $x \in I$, $f'(x) = -3\sin(3x)$.
   On étudie le signe de $\sin(3x)$ lorsque $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$.
   Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$, alors $0 \leqslant 3x \leqslant \pi$, et donc $\sin(3x) \geqslant 0$.
   En multipliant par $-3 < 0$, on a donc $f'(x) \leqslant 0$.

x	0		$\pi/3$
$\sin(3x)$	0	$+$	0
$f'(x) = -3\sin(3x)$	0	$-$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

   $f(0) = \cos(0) = 1$, et $f(\dfrac{\pi}{3}) = \cos\pi = -1$.

Exercice 2 (69 page 243)

$f(x) = 2\cos(3x + \dfrac{\pi}{4})$ sur $I = \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

1. $f'(x) = -6\sin(3x + \dfrac{\pi}{4})$.
2. Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, alors $0 \leqslant 3x \leqslant \dfrac{3\pi}{4}$.
   Donc $\dfrac{\pi}{4} \leqslant 3x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \pi$.
   Ainsi, si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, alors $\sin(3x + \dfrac{\pi}{4}) \geqslant 0$.
   En multipliant par $-6 < 0$, il vient : Si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, alors $f'(x) \leqslant 0$.
3. Si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, alors $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant 3x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$.
   Donc $\pi \leqslant 3x + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \dfrac{7\pi}{4}$.

Ainsi, si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, alors $\sin(3x + \dfrac{\pi}{4}) \leqslant 0$.
En multipliant par $-6 < 0$, il vient : Si $\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, alors $f'(x) \geqslant 0$.

x	0		$\pi/4$		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

$f(0) = 2\cos\dfrac{\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
$f(\dfrac{\pi}{4}) = 2\cos(\pi) = 2 \times (-1) = -2$.
$f(\dfrac{\pi}{2}) = 2\cos\dfrac{7\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Exercice 3 (ex 1 du cours)
Compléter.

1. Le point $A(-2; 5)$ a pour affixe $z_A = -2 + 5\mathrm{i}$
2. Si $z_B = -4\mathrm{i}$, le point B a pour coordonnées $B(0; -4)$.
3. Si $z_E = 6 - 4\mathrm{i}$ et $z_F = 2 - \mathrm{i}$, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{EF}$ est :
   $z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = 2 - \mathrm{i} - (6 - 4\mathrm{i}) = -4 + 3\mathrm{i}$
   Cela signifie que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$ sont $(-4; 3)$.
4. Soient $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ les vecteurs d'affixes respectives $1 + 3\mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$.
   L'affixe du vecteur $3\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}$ est :
   $z_{3\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}} = 3(1 + 3\mathrm{i}) - (-2 + \mathrm{i}) = 5 + 8\mathrm{i}$
5. Soient $C(2 + \mathrm{i})$ et $D(-10 - 3\mathrm{i})$ deux points données par leurs affixes respectives.
   Le milieu K du segment $[CD]$ a pour affixe :
   $z_K = \dfrac{z_C + z_D}{2} = \dfrac{2 + \mathrm{i} - 10 - 3\mathrm{i}}{2} = -4 - \mathrm{i}$.
   Cela signifie que les coordonnées de K sont $(-4; -1)$.

Exercice 4 (ex 3 du cours)
Soient les points E, F, G d'affixes respectives $z_E = 2 + \mathrm{i}$, $z_F = 4 + 3\mathrm{i}$ et $z_G = 6 - \mathrm{i}$.
Étudier la nature du triangle EFG.
On calcule les longueurs des côtés du triangle EFG.
$EF = |z_F - z_E| = |4 + 3\mathrm{i} - (2 + \mathrm{i})| = |2 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
$EG = |z_G - z_E| = |6 - \mathrm{i} - (2 + \mathrm{i})| = |4 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
$FG = |z_G - z_F| = |6 - \mathrm{i} - (4 + 3\mathrm{i})| = |2 - 4\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Comme $EG = FG$, le triangle est isocèle en G, (et il n'est pas rectangle).

Exercice 5 (55 page 223)
On donne $z = 5 + 3\mathrm{i}$, et $z' = 2 - \mathrm{i}$.

1. $|z| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.
   $|z'| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.
2. Par propriété, $|z \times z'| = |z| \times |z'| = \sqrt{34} \times \sqrt{5} = \sqrt{170}$.
   De même, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{34}} = \dfrac{\sqrt{34}}{34}$.
   Et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} = \dfrac{\sqrt{34}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{170}}{5}$.

Exercice 6 (59 page 223)
On donne $z_A = 1 + 3\mathrm{i}$, $z_B = 3 + \mathrm{i}$, $z_C = 1 - \mathrm{i}$, et $z_D = -3 - 3\mathrm{i}$.

1. Montrons que $ABCD$ est un parallélogramme.
   $ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (attention à l'ordre des points ici).
   Donc $ABCD$ est un parallélogramme ssi $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$.
   $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + \mathrm{i} - (1 + 3\mathrm{i}) = 2 - 2\mathrm{i}$.
   $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 1 - \mathrm{i} - (-1 + \mathrm{i})) = 2 - 2\mathrm{i}$.
   Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Montrons que $ABCD$ est un carré.
   Comme on sait que $ABCD$ est un parallélogramme, il suffit de montrer qu'il a deux côtés consécutifs de même longueur (losange), et les diagonales de même longueur (rectangle).
   En effet, si un quadrilatère est à la fois un losange et un rectangle alors c'est un carré.
   $AB = |z_B - z_A| = |2 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   $AD = |z_D - z_A| = | - 1 + \mathrm{i} - (1 + 3\mathrm{i})| = | - 2 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
   On a bien $AB = AD$.
   Donc $ABCD$ est un parallélogramme et il a deux côtés consécutifs de même longueur.
   Donc $ABCD$ est un losange.
   Étudions si les diagonales sont de même longueur.
   $AC = |z_C - z_A| = |1 - \mathrm{i} - (1 + 3\mathrm{i})| = | - 4\mathrm{i}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$.
   $BD = |z_D - z_B| = | - 1 + \mathrm{i} - (3 + \mathrm{i})| = | - 4| = 4$.
   Donc le losange $ABCD$ a de plus ses diagonales de même longueur.
   Donc $ABCD$ est un carré.

Exercice 7 (77 page 245)
Sur $[2; 8]$, on a la fonction ff définie par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$.

1. $f'(x) = \dfrac{(-2x + 10)x^2 - (-x^2 + 10x - 16)2x}{(x^2)^2} = \dfrac{-2x^3 + 10x^2 + 2x^3 - 20x^2 + 32x}{x^4}$
   $f'(x) = \dfrac{-10x^2 + 32x}{x^4} = \dfrac{(-10x + 32)x}{x^3 \times x} = \dfrac{-10x + 32}{x^3}$
2. Tableau de variation de f sur $[2; 8]$.
   Pour tout $x \in [2; 8]$, on a $x^3 > 0$.
   $-10x + 32 = 0$ ssi $x = 3,2$.

x	2		$3,2$		8
$-10x + 32$		$+$	0	$-$	
x^3		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$0,5625$	$\searrow$	0

   On trouve les images à la calculatrice.
3. f est convexe sur $[2; 8]$ ssi $f'' \geqslant 0$ sur $[2; 8]$.
   On rappelle que $f'(x) = \dfrac{-10x + 32}{x^3}$.
   $f''(x) = \dfrac{-10(x^3) - (-10x + 32)3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{-10x^3 + 30x^3 - 96x^2}{x^6}$
   $f''(x) = \dfrac{20x^3 - 96x^2}{x^6} = \dfrac{x^2(20x - 96)}{x^2 \times x^4} = \dfrac{20x - 96}{x^4}$.
   À l'aide de la calculatrice, $f''(3) = \dfrac{60 - 96}{3^4} = -\dfrac{4}{9} < 0$. Donc f n'est pas convexe.
   Remarque : $20x - 96 > 0$ ssi $x > \dfrac{96}{20} = 4,8$.
   Sur l'intervalle $[2, 8]$, il est possible que $f'' < 0$.
   Plus précisément, $f'' < 0$ si $x \in [2; 4,8[$.