Chapitre 3 : Équations

I Équations du premier degré

Méthode : On isole l'inconnue x.

Exemple :
Résoudre l'équation $3x + 21 = 0$.
$3x + 21 = 0$, donc $3x = -21$, puis $x = \dfrac{-21}{3}$, $x = -7$.
La solution de cette équation est -7.

II Équations produits

Théorème
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Méthode pour les équations produits :

1. Faire apparaître 0.
2. Factoriser.
3. Conclure avec le théorème.

Exemple :
Résoudre $4x^2 = 5x$.

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 & = & 5x \\ 4x^2 - 5x & = & 0 \\ x(4x-5) & = & 0 \\ x = 0 & \text{ou} & 4x - 5 = 0 \\ x = 0 & \text{ou} & x = \dfrac{5}{4} \end{array}$$

Les solutions sont 0 et $\dfrac{5}{4}$.

Remarque
Pour factoriser une expression, on cherche un facteur commun ou bien on reconnaît une identité remarquable.

Propriété (identités remarquables)
Pour tous réels a et b, on a :

$$\begin{array}{rcl} a^2 + 2ab + b^2 & = & (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 & = & (a-b)^2 \\ a^2 - b^2 & = & (a+b)(a-b) \end{array}$$

Exercice 1
Équations sur Euler :

1. ressource 569
2. ressource 580
3. ressource 581

Exercice 2
Exercice corrigé
Soit $f(x) = x^2 - 16 + (3x + 12)(-2x + 3)$.

1. Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3) \\ & = & x^2 - 16 - [-6x^2 + 9x - 24x + 36] \\ & = & x^2 - 16 - (-6x^2 - 15x + 36) \\ & = & x^2 - 16 + 6x^2 + 15x - 36 \\ & = & 7x^2 + 15x - 52 \end{array}$$

2. En factorisant $f(x)$, montrer que $f(x) = (x + 4)(7x - 13)$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 - 16 - (3x + 12)(-2x + 3) \\ & = & (x + 4)(x - 4) - 3(x + 4)(-2x + 3) \\ & = & (x + 4)[(x - 4) - 3(-2x + 3)] \\ & = & (x + 4)(x - 4 + 6x - 9) \\ & = & (x + 4)(7x - 13) \end{array}$$

3. Choisir la bonne expression pour résoudre les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$.
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
   On part donc de l'expression factorisée.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ (x + 4)(7x - 13) & = & 0 \\ x + 4 = 0 & \text{ou} & 7x - 13 = 0 \\ x = -4 & \text{ou} & 7x = 13 \\ x = -4 & \text{ou} & x = \dfrac{13}{7} \end{array}$$

   $\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ sont } -4 \text{ et } \dfrac{13}{7}.}$

   (b) $f(x) = -52$.
   On part de l'expression développée réduite car elle permet de factoriser une fois qu'on a fait apparaître 0 d'un côté du signe égal :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & -52 \\ 7x^2 + 15x - 52 & = & -52 \\ 7x^2 + 15x & = & 0 \\ x(7x + 15) & = & 0 \end{array}$$

   Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul.
   Donc $x = 0$ ou $7x + 15 = 0$.

$x = 0$ ou $x = -\dfrac{15}{7}$.

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = -52 \text{ sont } 0 \text{ et } -\dfrac{15}{7}.}$

(c) $f(x) = 15x - 3$.
Là encore, à partir de l'expression développée réduite, on peut factoriser après avoir fait apparaître 0.

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & 15x - 3 \\
7x^2 + 15x - 52 & = & 15x - 3 \\
7x^2 + 15x - 52 - 15x + 3 & = & 0 \\
7x^2 - 49 & = & 0 \\
7(x^2 - 7) & = & 0 \\
x^2 - 7 & = & 0 \\
(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) & = & 0 \\
x - \sqrt{7} = 0 & \text{ou} & x + \sqrt{7} = 0 \\
x = \sqrt{7} & \text{ou} & x = -\sqrt{7}
\end{array}$$

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) = 15x - 3 \text{ sont } \sqrt{7} \text{ et } -\sqrt{7}.}$

Exercice 3
Résoudre une équation en factorisant à l'aide d'un facteur commun : ressource 3825

III Équations quotients

Propriété
Soient A et B deux fonctions de la variable réelle.
L'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ est définie lorsque $B(x) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $A(x) = 0$.

Exemple :
Résoudre l'équation $\dfrac{x^2 - 4x}{x + 7} = 0$.
On cherche les valeurs interdites.
$x + 7 = 0$ donne $x = -7$.
L'équation est bien définie pour tout $x \neq -7$.

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{x^2 - 4x}{x + 7} & = & 0 \\
x^2 - 4x & = & 0 \\
x(x - 4) & = & 0 \\
x = 0 & \text{ou} & x - 4 = 0 \\
x = 0 & \text{ou} & x = 4
\end{array}$$

On peut garder ces deux solutions (différentes de la valeur interdite -7).
$\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont 0 et 4.}}$

Exercice 4

1. Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$: ressource 1542
2. Déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction associée à la fonction carré : ressource 2062
3. Déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction associée à la fonction inverse : ressource 2063