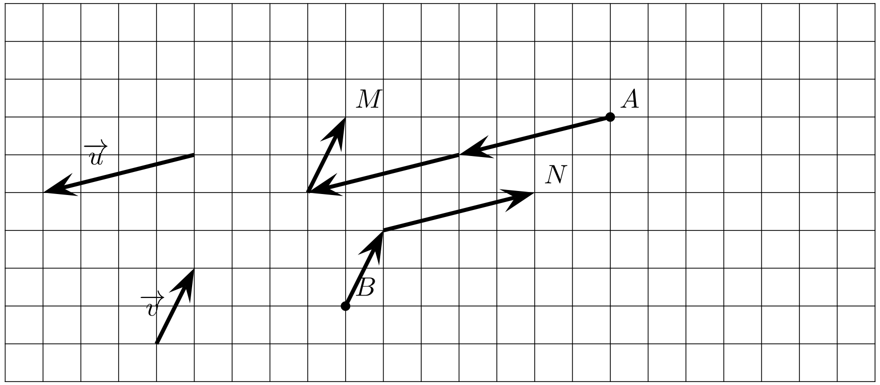
Interrogation de mathématiques n° 7
Réponses du sujet 1

Exercice 1 (cours, 3 points)
Compléter sur l'énoncé.

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$.
2. Soient A, B, C et D quatre points du plan, avec $A \neq B$ et $C \neq D$. $(AB)//(CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
3. Énoncer la relation de Chasles sur les vecteurs. Pour tous points A, B et C, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2 (2 points)
On fera apparaître les traits de construction (dessiner les vecteurs).

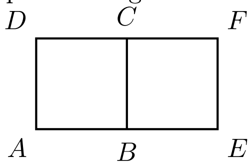
1. Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} + \vec{v}$.
2. Construire le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \vec{v} - \vec{u}$.



Exercice 3 (1 point)
Étudier si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 60 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$xy' - yx' = \frac{1}{5} \times 60 - (-2) \times (-6) = 0$.
On peut aussi observer que $\vec{v} = -30\vec{u}$.
$\boxed{\text{Donc } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}}$

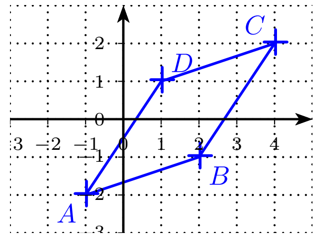
Exercice 4 (2 points)
$ABCD$ et $BEFC$ sont deux carrés.
En utilisant la relation de Chasles, trouver la lettre manquante pour compléter les égalités suivantes. On justifiera en écrivant les étapes intermédiaires.



1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CE}$.
3. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
4. $\overrightarrow{FC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB}$.

Exercice 5 (5 points)

1. Placer dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ les points $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$, et $C(4;2)$.



On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2. Les points A, B, et C sont-ils alignés ? Justifier par le calcul.
A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$xy' - yx' = 3 \times 4 - 5 \times 1 = 7 \neq 0$.
$\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ne sont pas colinéaires, } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés.}}$
3. Soit $D(1;1)$. Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.
$ABCD$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
On a vu que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \text{ et } ABCD \text{ est un parallélogramme.}}$
4. Les droites (AC) et (OD) sont-elles parallèles ? Justifier.
$(AC)//(OD)$ ssi $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
On sait que $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Or, $\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$xy' - yx' = 5 - 4 = 1 \neq 0$.
$\boxed{\text{Donc } \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{OD} \text{ ne sont pas colinéaires, les droites } (AC) \text{ et } (OD) \text{ ne sont pas parallèles.}}$

Exercice 6 (1,5 point)
Montrer que pour tous points A, B, C et D du plan,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}$.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.

Donc pour tous points A, B, C, D du plan,
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

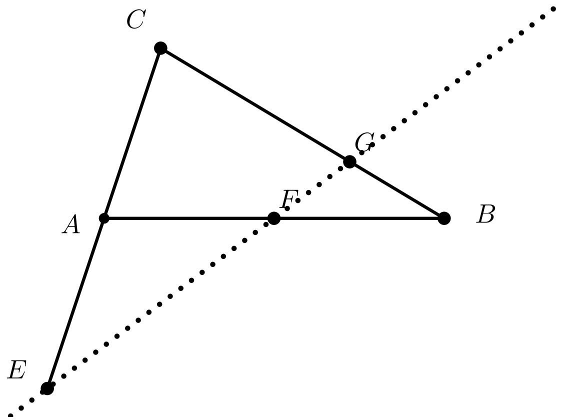
Exercice 7 (1,5 point)
Compléter la fonction Python qui renvoie si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(a;b)$ sont colinéaires.

```
def colineaire(x,y,a,b):
     if x*b-y*a==0
          return("Les vecteurs sont colinéaires")
     else :
           return("Les vecteurs ne sont pas colinéaires")
```

Exercice 8 (4 points)
ABC est un triangle. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\text{ et }\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

1. Faire une figure.



2. (a) Montrer que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

   $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-(-\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

   (b) Montrer que $\overrightarrow{EG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

   Indication : $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$.
   $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.
   $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

   (c) En déduire que E, F et G sont alignés.

   On observe que $\overrightarrow{EG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont colinéaires, et les points E, F et G sont alignés.

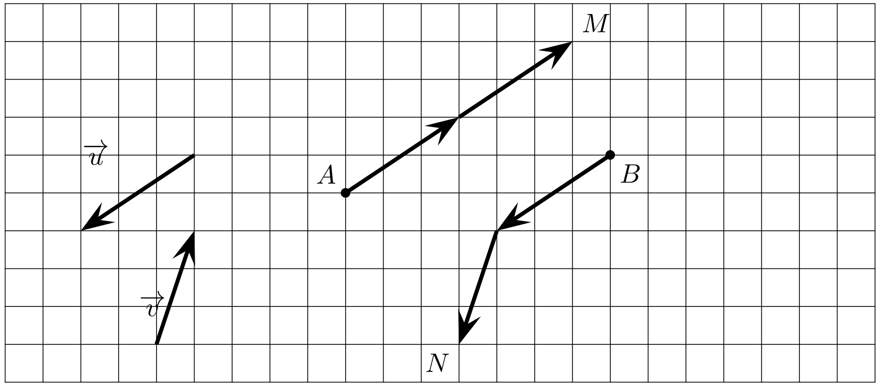
Interrogation de mathématiques n° 7
Réponses du sujet 2

Exercice 9 (Questions de cours, 3 points)

1. Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Soients $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, et $k \in \mathbb{R}$.
$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ $\quad k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.
3. Énoncer la relation de Chasles sur les vecteurs.
Pour tous points A, B, C, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

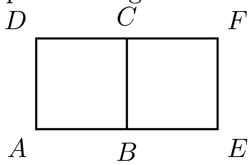
Exercice 10 (2 points)
On fera apparaître les traits de construction (dessiner les vecteurs).

1. Construire le poit M tel que $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{u}$.
2. Construire le point N est tel que $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.



Exercice 11 (1 point)
Étudier si les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 30 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
$xy'-yx'=\dfrac{1}{3}\times 30-6\times 2=10-12=-2\neq 0$.
Donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 12 (2 points)
$ABCD$ et $BEFC$ sont deux carrés.
En utilisant la relation de Chasles, trouver la lettre manquante pour compléter les égalités suivantes. On justifiera en écrivant les étapes intermédiaires.



1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
2. $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DE}$.
3. $\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}$.
4. $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{FE}$.

Exercice 13 (5 points, voir sujet 1)

1. Placer dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ les points $A(-1;-2)$, $B(2;-1)$, et $C(4;2)$. On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.
2. Les points A, B, et C sont-ils alignés ? Justifier par le calcul.
3. Soit $D(1;1)$. Prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.
4. Les droites (AC) et (OD) sont-elles parallèles ? Justifier.

Exercice 14 (1,5 point)
Montrer que pour tous points A, B, C et D du plan,
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}$.
Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Exercice 15 (1,5 point, voir sujet 1)
Compléter la fonction Python qui renvoie si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(a;b)$ sont colinéaires.

```
def colineaire(x,y,a,b):
     if ..............................................................
          return("..............................................")
     else :
           return("..............................................")
```

Exercice 16 (4 points, voir sujet 1)
ABC est un triangle. Les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\text{ et }\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}.$$

1. Faire une figure.
2. (a) Montrer que $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{EG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.
   Indication : $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}$.
   (c) En déduire que E, F et G sont alignés.