1re G. Interrogation de mathématiques n° 4

Correction du Sujet 1

Exercice 1 (cours, 6 points)

1. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
2. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
3. Tableau des dérivées usuelles

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$I = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, $n \leqslant -1$	$f(x) = nx^{n-1}$	$I =]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 5x$

1. Soit $h \neq 0$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-5(2+h)-(2^2-5\times 2)}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h^2+4h+4-10-5h+6}{h} = \frac{h^2-h}{h} = \frac{h(h-1)}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = h-1$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = -1$. $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en 2 et } f'(2) = -1.}$

2. En déduire une équation de la tangente au point d'abscisse 2.

On sait que $f'(2) = -1$.

On rappelle que $f(x) = x^2 - 5x$. Donc $f(2) = 2^2 - 5\times 2 = -6$.

$y = f'(2)(x-2)+f(2) = -1(x-2)-6 = -x-4$.

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -x-4$.

Exercice 3 (3 points)

1. Lire graphiquement $f(-3)$ et $f(1)$.

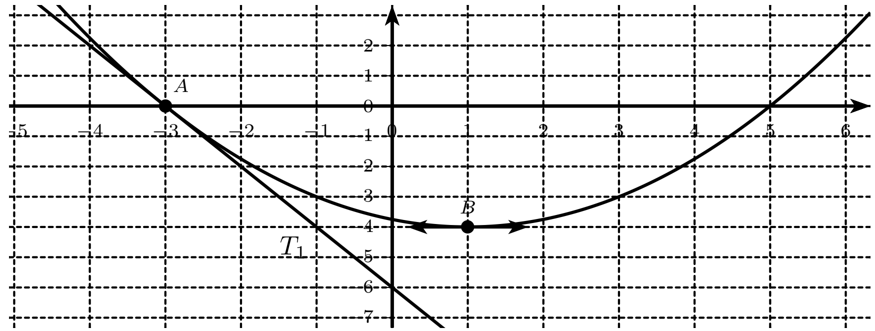
$\boxed{f(-3) = 0 \text{ et } f(1) = -4.}$

2. Déterminer $f'(-3)$ et $f'(1)$. Justifier.

$f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse -3, on lit $f'(-3) = -2$.

De même, $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1.

Comme la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses, $f'(1) = 0$.



Exercice 4 (6 points)

Pour chaque fonction f, donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, et $a = -2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$, donc $f'(-2) = 4\times(-2)^3 = -32$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -4x+7$, et $a = -1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -4$ donc $f'(-1) = -4$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -5$, et $a = 9$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ donc $f'(9) = 0$.

4. Pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$, et $a = 1$.

On a, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\dfrac{4}{x^5}$.

Donc $f'(1) = -\dfrac{4}{1^5} = -4$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 - x + 11$, et $a = 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6\times 2x - 1 = 12x - 1$. Donc $f'(1) = 12 - 1 = 11$.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3-2x}{x^2+5}$, et $a = 0$.

$f'(x) = \dfrac{(-2(x^2+5)-(3-2x)\times 2x}{(x^2+5)^2} = \dfrac{2x^2-6x-10}{(x^2+5)^2}$.

Donc $f'(0) = \dfrac{-10}{25} = -\dfrac{2}{5}$.

1re G. Interrogation de mathématiques n° 4

Correction du Sujet 2

Exercice 5 (cours, 6 points)

1. Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
2. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
3. Tableau des dérivées usuelles :

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$, $n\geqslant 1$	$f(x)=nx^{n-1}$	$I=\mathbb{R}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$I=]0;+\infty[$

Exercice 6 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+x$

1. En revenant à la définition, étudier la dérivabilité de f en -1, et montrer que $f'(-1)=-5$.

   Soit $h\neq 0$.

   $\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \dfrac{3(-1+h)^2+(-1+h)-(3\times(-1)^2-1)}{h}$

   $= \dfrac{3(h^2-2h+1)+h-1-2}{h} = \dfrac{3h^2-5h}{h} = 3h-5.$

   $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = -5.$

   $\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en } -1 \text{ et } f'(-1)=-5.}$

2. En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1.

   On a $f'(-1)=-5$.

   $f(-1)=3\times(-1)^2-1=2.$

   $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)=-5(x+1)+2=-5x-3.$

   $\boxed{\text{La tangente à la courbe de } f \text{ au point d'abcisse } -1 \text{ a pour équation } y=-5x-3.}$

Exercice 7 (3 points)

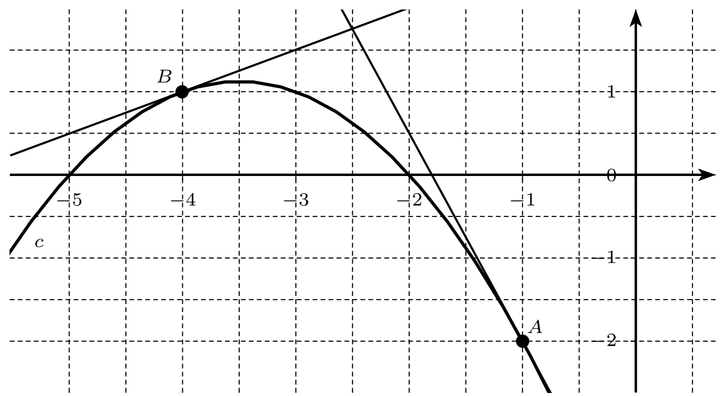
On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et les tangentes à cette courbe aux points A et B.

1. Lire $f(-4)$ et $f(-1)$.

   $\boxed{f(-4)=1, \text{ et } f(-1)=-2.}$

2. Déterminer $f'(-4)$. Justifier.

   $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B d'abscisse -4. $\boxed{f'(-4)=0,5.}$ $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A d'abscisse -1. $\boxed{f'(-1)=-2,5.}$



Exercice 8 (6 points)

Pour chacune des fonctions f, donner l'expression de la dérivée $f'(x)$, et en déduire le nombre dérivé $f'(a)$ pour la valeur de a demandée.

1. Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$, et $a=-2$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x>0,\ f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}, \text{ donc } f'(-2)=-\dfrac{1}{(-2)^2}=-\dfrac{1}{4}.}$

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2x+7$, et $a=-1$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2, \text{ donc } f'(-1)=2.}$

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}$, et $a=11$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ f'(x)=0,\text{donc } f'(11)=0.}$

4. Pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, et $a=1$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x>0,\ f(x)=x^{-3}, \text{ donc } f'(x)=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}, \text{ donc } f'(1)=-\dfrac{3}{1^4}=-3.}$

5. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=6x^2-x+11$, et $a=1$.

   $\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ f'(x)=6\times 2x-1=12x-1. \text{ Donc } f'(1)=12-1=11.}$

6. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3-2x}{x^2+5}$, et $a=0$.

   $\boxed{f'(x)=\dfrac{(-2(x^2+5)-(3-2x)\times 2x}{(x^2+5)^2}=\dfrac{2x^2-6x-10}{(x^2+5)^2}. \text{ Donc } f'(0)=\dfrac{-10}{25}=-\dfrac{2}{5}.}$