Chapitre 12 : Suites arithmétiques. Suites géométriques

I Suites arithmétiques

Définition
Une suite arithmétique est une suite où chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre r. Le nombre r est appelé la raison de la suite arithmétique.
On a donc la relation suivante :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple : 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 19 sont les premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n + 3$. La raison de cette suite arithmétique est donc 3.

Exercice 1
Chercher le 4^e terme de la suite arithmétique (u_n) de raison -7 et de premier terme $u_0 = 10$.

Théorème (Terme général d'une suite arithmétique de raison r)
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et de raison r. Alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + nr$.
Si (u_n) a pour premier terme u_1, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$.
On retiendra :

$$u_n = (\text{premier terme}) + (\text{nombre de termes avant } u_n) \times (\text{raison})$$

Remarque
On a aussi une formule pour exprimer u_n à partir d'une terme u_p quelconque :

$$u_n = u_p + (n-p) \times r$$

Exercice 2
La suite arithmétique (u_n) est définie par $u_0 = 6$ et $r = -\dfrac{1}{2}$. Calculer u_{2012}.

Remarque
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
   (u_n) est croissante ssi $r \geqslant 0$, et décroissante ssi $r \leqslant 0$.
2. Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés.
   C'est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction affine.

Théorème (Somme des premiers termes d'une suite arithmétique)
Soit (u_n) une suite arithmétique.

1. Si (u_n) est définie partir du rang 0, la somme des $(n+1)$ premiers termes de (u_n) est :
$$u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$
2. Si (u_n) est définie partir du rang 1, la somme des n premiers termes de (u_n) est :
$$u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}+u_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}$$

On retiendra :
$$S=\frac{(\text{nombre de termes})(\text{premier terme } + \text{ dernier terme})}{2}$$

Application : Somme des n premiers nombres entiers naturels.
$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Remarque (utile pour des calculs de sommes arithmétiques)
Soit $a+\cdots+A$ une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r>0$.
Alors, la somme contient $\dfrac{A-a}{r}+1$ termes.

Exercice 3

1. Calculs de termes d'une suite arithmétique :
ressource 26
ressource 1275
ressource 1276
2. Terme général d'une suite arithmétique :
ressource 29
ressource 1278
ressource 1279
3. Somme des premiers termes consécutifs : ressource 1298
4. Somme de termes consécutifs : ressource 1299

II Suites géométriques

Définition
Une suite géométrique est une suite où chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre non nul q appelé la raison.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n\times q$

Exemple : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 sont les premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1 (ce sont les puissances successives de 2).

Remarque

1. Si $q > 0$, les termes de la suite (u_n) sont tous de même signe (le signe du premier terme).
2. Si $q < 0$, les signes des termes de la suite alternent.

Théorème (Terme général d'une suite géométrique)
Soit (u_n) la suite géométrique de raison q.

1. Si le premier terme est u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = u_0 \times q^n$.
2. Si le premier terme de la suite est u_1, alors pour tout $n \geqslant 1$, $\quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

On retiendra :

$$u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{(\text{nombre de termes avant } u_n)}$$

Remarque
À partir d'un terme u_p quelconque,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exercice 4
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison $q = -\dfrac{1}{3}$. Calculer u_5.

Théorème (Somme des premières puissances entières d'un nombre)
Soient q un nombre réel et n un nombre entier, $n \geqslant 1$.

1. Si $q \neq 1$ alors $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si $q = 1$, alors $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{somme de } n+1 \text{ termes}} = n + 1$.

Démonstration

1. On suppose $q \neq 1$. Notons $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$.
   Si on multiplie cette égalité par q, on obtient $qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$.
   En soustrayant membre à membre ces deux égalités, il vient :
   $$S - qS = 1 - q^{n+1}$$
   $$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$
   Ainsi (on peut diviser puisqu'on suppose $q \neq 1$), $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Evident.

Théorème (Somme des premiers termes d'une suite géométrique)
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On suppose $q \neq 1$.

1. Si le premier terme est u_0, alors $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
2. Si le premier terme est u_1, alors $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

On retiendra :

$$S = (\text{premier terme}) \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

Application :
Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 256$.
$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^8 = \dfrac{1-2^9}{1-2} = \dfrac{1-512}{-1} = 511$.

Exercice 5

1. Calculs de termes d'une suite éométrique :
   ressource 2501
   ressource 2503
   ressource 2504
2. Terme général d'une suite géométrique :
   ressource 2506
   ressource 2507
3. Somme des premiers termes d'une suite géométrique : ressource 2534
4. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique : ressource 2535 ressource 3844
5. Lecture graphique du premier terme et de la raison :
   ressource 3846 ressource 3845

III Le symbole sigma Σ

Théorème (linéarité de la somme)
Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ nombres réels. Soient a et b des réels. alors,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}(ax_i+b) &= \sum_{i=0}^{n} ax_i + \sum_{i=0}^{n} b \\ &= a\sum_{i=0}^{n} x_i + (n+1)\times b\end{aligned}$$

IV Pourquoi suites « arithmétiques », et « géométriques » ?

Si (u_n) est une suite arithmétique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}, le terme central est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

$$u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$$

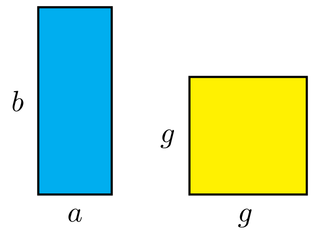
Si (u_n) est une suite géométrique, lorsqu'on considère 3 termes consécutifs quelconques, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}, le terme central est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent.

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}\times u_{n+1}}$$

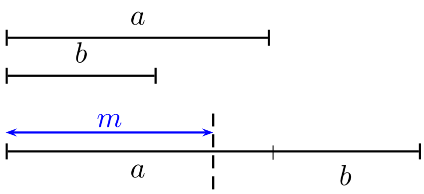
IV.1 Moyennes arithmétique et géométrique de deux nombres

Soient a et b deux nombres réels. La moyenne arithmétique de a et de b est $m = \dfrac{a+b}{2}$
La moyenne géométrique de deux nombres positifs a et b est $g = \sqrt{ab}$.

Le carré de côté g a la même aire que le rectangle de dimensions a et b (d'où moyenne « géométrique »).
En effet, $g^2 = ab$.

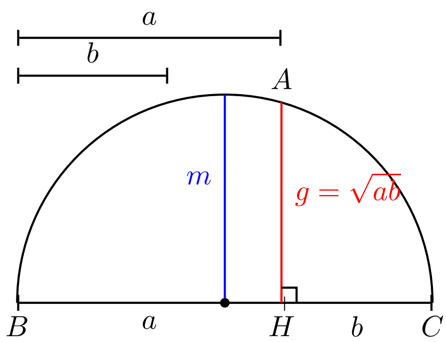


IV.2 Construction de la moyenne arithmétique à la règle et au compas



Pour la moyenne arithmétique, il suffit de tracer la médiatrice du segment de longueur $a+b$ pour diviser la longueur $a+b$ en deux parties égales. $m = \dfrac{a+b}{2}$.

IV.3 Construction de la moyenne géométrique à la règle et au compas



On trace le cercle de diamètre $[BC]$, $(BC = a+b)$. Le point A est sur le cercle, et donc ABC est rectangle en A.
Alors, la hauteur AH du triangle rectangle ABC est la moyenne géométrique de a et b.
$a = BH$, et $b = CH$. Pour montrer que $AH = \sqrt{BH \times CH}$, on montre que $AH^2 =$

$BH \times CH$ (équivalent).

$$\begin{aligned}
AH^2 &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} \\
&= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
&= 0 + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH} \\
&= BH \times CH + BH \times CH - BH \times CH \\
&= BH \times CH \\
AH^2 &= ab \\
AH &= \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Remarque
La figure précédente permet de visualiser le fait que la moyenne géométrique est toujours inférieure ou égale la moyenne arithmétique ($g \leqslant m$) et que $g = m$ uniquement lorsque $a = b$.