BTS CRSA2. Correction de l'interrogation n° 5

Exercice 1 (3 points)

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$.

1. alors, pour tous réels u et v appartenent à $[a; b]$ avec $u < v$, on a $P(u < X < v) = \dfrac{v-u}{b-a}$
2. $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$; $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$; $\sigma(X) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$

Exercice 2 (10 points)

Paul se rend à son travail en transports en commun. On note T la variable alétoire égale à la durée, exprimée en minutes, du trajet entre son domicile et son lieu de travail.

On suppose que T suit la loi uniforme sur $[15; 30]$.

1. (a) Donner l'expression de la fonction de densité de la loi suivie par T sur $[15; 30]$.
   $f(t) = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{15}$.

   (b) Calculer $P(17 < T < 23)$, et $P(T \leqslant 24)$.
   $P(17 < T < 23)\dfrac{23-17}{30-15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.
   $P(T \leqslant 24) = \dfrac{24-15}{30-15} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$

   (c) Calculer $E(T)$. Interpréter.
   $E(T) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{15+30}{2} = 22,5$.
   En moyenne, il met 22,5 minutes pour se rendre au travail.

   (d) Montrer que la probabilité qu'il mette plus de 27 minutes pour se rendre au travail est de 0,2.
   $P(T > 27) = \dfrac{30-27}{30-15} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} = 0,2$.
   La probabilité qu'il mette plus de 27 minutes est bien 0,2.

2. On suppose que la durée d'un trajet est indépendante de celle des autres trajets.
   Paul se rend au travail tous les jours du lundi au vendredi.
   Sur une période de 6 semaines de travail, On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours de travail pour lesquels le temps de trajet a été supérieur à 27 minutes.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   $6 \times 5 = 30$.
   On répète 30 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de paramètre $p = P(T > 27) = 0,2$.
   La variable X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30; 0,2)$.

   (b) Quelle est la probabilité qu'au plus 5 trajets aient duré plus de 27 minutes ?
   $P(X \leqslant 5) \approx 0,428$.
   La probabilité qu'au plus 5 trajets aient duré plus de 27 minutes est de 0,428 environ.

   (c) En moyenne, sur 6 semaines de travail, combien de trajets ont une durée supérieure à 27 minutes ? Justifier.
   $E(X) = n \times p = 30 \times 0,2 = 6$.
   En moyenne, sur 6 semaines de travail, il y a 6 trajets qui durent plus de 27 minutes.

Exercice 3 (4 points)

Soit X suivant la loi normale $\mathcal{N}(11; 4)$ de moyenne 11 et d'écart-type 4. Arrondir à 10^{-3}. Aucune justification n'est demandée.

1. $P(11 < X < 15) \approx 0,341$
2. $P(X \geqslant 13) \approx 0,309$
3. $P(4 \leqslant X) \approx 0,960$
4. $P(X \in [3; 19]) \approx 0,955$
5. Le réel a tel que $P(11 - a < X < 11 + a) = 0,8$ est $a \approx 5,126$

Exercice 4 (3 points)

Une entreprise de transport a un parc total de 200 camions.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque camion tiré au hasard dans le parc, associe la distance qu'il a parcourue en une journée en kilomètres. On admet que cette variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 150 et d'écart-type 25. Arrondir à 10^{-3} près.

1. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure, un jour donné, une distance comprise entre 130 et 170 kilomètres.
   $P(130 < X < 170) \approx 0,576$.
   La probabilité qu'il parcoure entre 130 et 170 km est d'environ 0,576.
2. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure, un jour donné, une distance supérieure à 200 kilomètres.
   $P(X > 200) \approx 0,023$.
   La probabilité qu'il parcoure plus de 200 km est d'environ 0,023.