Seconde
Correction du devoir maison n° 2

Exercice 1

1. Déterminer l'écriture scientifique des nombres suivants :
   $a = 384\,000 = 3,84 \times 10^5$.
   $b = 0.002\,054\,1 = 2,054\,1 \times 10^{-3}$
   $c = \dfrac{54 \times 10^4}{2 \times 10^{-12}} = 27 \times 10^{16} = 2,7 \times 10^{17}$

$$\begin{aligned} d &= 23 \times 10^{-14} + 12.541 \times 10^{-11} \\ &= 23 \times 10^{-14} + 12\,541 \times 10^{-14} \\ &= (12\,541 + 23) \times 10^{-14} \\ &= 12\,564 \times 10^{-14} \\ &= 1.256\,4 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

2. On donne les informations suivantes :
   $\dfrac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,377\ 964\ 473.$ $\qquad \dfrac{3}{\pi - 4} \approx -3,494\ 844\ 274.$

   (a) Donner l'arrondi à 10^{-4} près de $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

   En arrondissant à 10^{-4} , $\dfrac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,3780$ (ou encore 0,378).

   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de $\dfrac{3}{\pi - 4}$.

   $-3,495 < \dfrac{3}{\pi - 4} < -3,494.$

Exercice 2

Écrire les nombres suivants sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$ où a, b, c et d sont des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) :
$x = \left(\dfrac{21}{4^2}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{35}{6}\right)^5$ $\qquad y = \dfrac{(140^{-3})^2}{0.03^2 \times 12^{-1}}$.

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{21}{4^2}\right)^{-3} \times \left(\frac{35}{6}\right)^5 \\ &= \frac{21^{-3}}{4^{-6}} \times \frac{35^5}{6^5} \\ &= 3^{-3} \times 7^{-3} \times 2^{12} \times 7^5 \times 5^5 \times 2^{-5} \times 3^{-5} \\ &= 2^7 \times 3^{-8} \times 5^5 \times 7^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{(140^{-3})^2}{0.03^2 \times 12^{-1}} \\ &= \frac{140^{-6}}{(3 \times 10^{-2})^2 \times 12^{-1}} \\ &= \frac{14^{-6} \times 10^{-6} \times 12}{3^2 \times 10^{-4}} \\ &= 14^{-6} \times 10^{-2} \times 12 \times 3^{-2} \\ &= 2^{-6} \times 7^{-6} \times 2^{-2} \times 5^{-2} \times 2^2 \times 3 \times 3^{-2} \\ &= 2^{-6} \times 3^{-1} \times 5^{-2} \times 7^{-6} \end{aligned}$$

Exercice 3

Écrire les nombres sous la forme $k\sqrt{5}$ où k est un nombre entier. Justifier.

$$\begin{aligned} A &= 11\sqrt{20} - 4\sqrt{45} + \sqrt{180} \\ &= 11\sqrt{4 \times 5} - 4\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{36 \times 5} \\ &= 11\sqrt{4}\sqrt{5} - 4\sqrt{9}\sqrt{5} + \sqrt{36}\sqrt{5} \\ &= 11 \times 2\sqrt{5} - 4 \times 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ &= 22\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ &= 16\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= -7\sqrt{5} + \sqrt{500} + \sqrt{245} \\ &= -7\sqrt{5} + \sqrt{100 \times 5} + \sqrt{49 \times 5} \\ &= -7\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 7\sqrt{5} \\ &= 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

Exercice 4 ($\sqrt{2}$ est irrationnel)

Première partie

1. Soit n un nombre entier naturel. Montrer que si n est impair alors n^2 est impair.
   On suppose que n est impair : il existe un nombre entier k tel que $n = 2k+1$.
   Donc $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2k + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1$.
   Comme k est un nombre entier, le nombre $(2k^2+2k)$ est aussi un entier, et $2(2k^2+2k)$ est un nombre entier pair (multiple de 2).
   Donc n^2 est impair.
2. En déduire que si n^2 est pair, alors n est pair.
   On suppose que n^2 est pair.
   Si n était impair, d'après la question 1, on aurait n^2 impair.
   Ceci est impossible (puisqu'on suppose n^2 pair).
   Donc l'entier n n'est pas impair : n est pair.

Deuxième partie : raisonnement par l'absurde

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il peut s'écrire $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers, et $PGCD(p,q) = 1$.
On peut en effet supposer que la fraction est sous forme irréductible.

1. Montrer que $p^2 = 2q^2$. En déduire que p^2 est pair, puis que p est pair.
   On a $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, ce qui implique, en élevant au carré, $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$.
   Alors, par produit en croix, $p^2 = 2q^2$.
   Comme $p^2 = 2q^2$, p^2 est multiple de 2, c'est-à-dire que p^2 est pair.
   D'après le 2. de la première partie, puisque p^2 est pair, p est pair.
2. Montrer qu'alors q^2 est pair et en déduire que q est pair.
   D'après 1), p est pair, ce qui signifie que $p = 2k$, k étant un nombre entier.
   L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient $(2k)^2 = 2q^2$, soit $4k^2 = 2q^2$.
   En simplifiant par 2, on a $q^2 = 2k^2$.
   Comme précédemment, on en tire que q^2 est un nombre pair, et avec le résultat de la première partie, q est pair.
3. Mettre en évidence une contradiction et en tirer une conclusion sur l'hypothèse de départ.
   On a montré que p et q sont tous les deux des nombres pairs, (c'est-à-dire des multiples de 2). On peut donc simplifier la fraction $\dfrac{p}{q}$ par 2.
   Ceci est en contradiction avec le fait que $\dfrac{p}{q}$ est sous forme irréductible.
   Puisque nous obtenons une contradiction, cela signifie que l'hypothèse de départ était fausse.
   $\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel. $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}}$

Exercice 5 ($\sqrt{2}$ est irrationnel)

Première partie

1. Soit n un nombre entier naturel. Montrer que si n est impair alors n^2 est impair.
   On suppose que n est impair : il existe un nombre entier k tel que $n = 2k+1$.
   Donc $n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2k + 2k + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k)+1$.
   Comme k est un nombre entier, le nombre $(2k^2+2k)$ est aussi un entier, et $2(2k^2+2k)$ est un nombre entier pair (multiple de 2).
   Donc n^2 est impair.
2. En déduire que si n^2 est pair, alors n est pair.
   On suppose que n^2 est pair.
   Si n était impair, d'après la question 1, on aurait n^2 impair.
   Ceci est impossible (puisqu'on suppose n^2 pair).
   Donc l'entier n n'est pas impair : n est pair.

Deuxième partie : raisonnement par l'absurde

On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il peut s'écrire $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers, et $PGCD(p,q) = 1$.
On peut en effet supposer que la fraction est sous forme irréductible.

1. Montrer que $p^2 = 2q^2$. En déduire que p^2 est pair, puis que p est pair.
   On a $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, ce qui implique, en élevant au carré, $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$.
   Alors, par produit en croix, $p^2 = 2q^2$.
   Comme $p^2 = 2q^2$, p^2 est multiple de 2, c'est-à-dire que p^2 est pair.
   D'après le 2. de la première partie, puisque p^2 est pair, p est pair.
2. Montrer qu'alors q^2 est pair et en déduire que q est pair.
   D'après 1), p est pair, ce qui signifie que $p = 2k$, k étant un nombre entier.
   L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient $(2k)^2 = 2q^2$, soit $4k^2 = 2q^2$.
   En simplifiant par 2, on a $q^2 = 2k^2$.
   Comme précédemment, on en tire que q^2 est un nombre pair, et avec le résultat de la première partie, q est pair.
3. Mettre en évidence une contradiction et en tirer une conclusion sur l'hypothèse de départ.
   On a montré que p et q sont tous les deux des nombres pairs, (c'est-à-dire des multiples de 2). On peut donc simplifier la fraction $\dfrac{p}{q}$ par 2.
   Ceci est en contradiction avec le fait que $\dfrac{p}{q}$ est sous forme irréductible.
   Puisque nous obtenons une contradiction, cela signifie que l'hypothèse de départ était fausse.
   $\sqrt{2}$ n'est donc pas un nombre rationnel. $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel.}}$