2de. Correction du devoir maison n^o 3

Exercice 1 (n^o 5 page 47)

Montrer que $D = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20}$ est un nombre entier.
On sait que pour tous réels a, b positifs ou nuls, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{6} \times \sqrt{20} \\ &= \sqrt{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 20} \\ &= \sqrt{(2 \times 3 \times 6) \times (4 \times 5 \times 20)} \\ &= \sqrt{6^2} \times \sqrt{20^2} \\ &= 6 \times 20 \\ &= 120 \end{aligned}$$

$\boxed{D = 120\text{, donc } D \text{ est bien un nombre entier.}}$

Exercice 2 (n^o 23 page 50)

Écrire le nombre $F = 15^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2}$ sous la forme $3^n \times 5^p$ avec $n, p \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} F &= 15^3 \times \frac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2} \\ &= (3 \times 5)^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times (3^2 \times 5)^{-2} \\ &= 3^3 \times 5^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times 3^{-4} \times 5^{-2} \\ &= 3^{3-2-4} \times 5^{3-2-2} \\ &= 3^{-3} \times 5^{-1} \end{aligned}$$

Exercice 3 (no 39 page 51)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = \sqrt{200} - \sqrt{98}$ et $BC = \dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8}$.

Montrer que $ABCD$ est un carré et calculer son aire.

1. Montrons que $ABCD$ est un carré.
   Comme $ABCD$ est un rectangle, c'est un carré si et seulement si il a deux côtés consécutifs de même longueur.
   On va montrer que $AB = BC$.
   D'une part,
   $AB = \sqrt{200} - \sqrt{98} = \sqrt{100 \times 2} - \sqrt{49 \times 2}$
   $AB = \sqrt{100} \times \sqrt{2} - \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
   D'autre part,
   $BC = \dfrac{\sqrt{350}}{\sqrt{7}} - \sqrt{8} = \sqrt{\dfrac{7 \times 50}{7}} - \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{50} - \sqrt{4} \times \sqrt{2}$
   $BC = \sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.
   $\boxed{\text{Comme } AB = BC\text{, le rectangle } ABCD \text{ a deux côtés consécutifs de même longueur. Donc } ABCD \text{ est un carré.}}$
2. Calculons son aire.
   L'aire du carré est $AB^2 = (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$.
   $\boxed{\text{Son aire est de 18 (unités d'aire).}}$