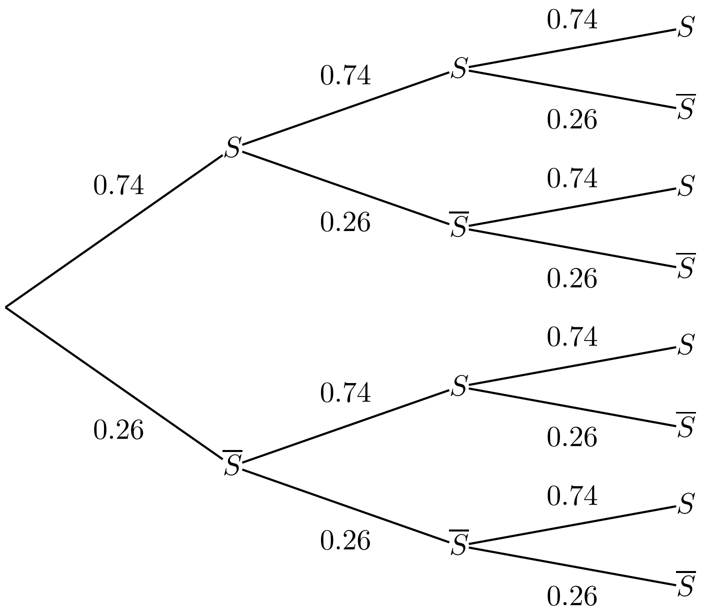
Contrôle n° 7
Éléments de correction du sujet 1

Exercice 1 (5 points)
Alain, joueur de tennis confirmé, rencontre ses partenaires de club. Sa probabilité de succès contre ces joueurs est de 0,74. Il joue trois matchs consécutifs et les résultats de ses matchs sont indépendants les uns des autres.
On arrondira les probabilités à 10^{-3} près.

1. Construire un arbre pondéré associé à cette situation.



2. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matchs gagnés.
   (a) Montrer que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   On répète 3 épreuves de Bernoulli (Alain gagne ou perd le match) identiques et indépendantes de même paramètre $p = 0,74$. La variable X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,74$.
   (b) Calculer la probabilité qu'il remporte exactement un match.
   $\boxed{P(X = 1) = 3 \times 0,74^1 \times 0,26^2 \approx 0,15.}$
   (c) Calculer la probabilité qu'il remporte au moins un match.
   $\boxed{P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,26^3 \approx 0,982.}$
   (d) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
   $E(X) = np = 3 \times 0,74 = 2,22$.
   En moyenne, Alain gagne 2,22 matchs sur des séries de 3 rencontres avec ses partenaires de club.

Exercice 2 (5 points)
Un club sportif propose à ses adhérents d'utiliser gratuitement sa salle de musculation un jour par semaine : le lundi, mardi, mercredi, jeudi, ou vendredi (pas le week-end).
45 adhérents choisissent au hasard sans se consulter un jour d'entraînement.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'adhérents qui choisissent le lundi.

1. X suit une loi binomiale, donner les paramètres de cette loi (sans justifier).
   $\boxed{n = 45, \text{ et } p = \frac{1}{5} = 0,2.}$
2. Déterminer la probabilité (arrondie à 10^{-4}) que :
   (a) moins de 15 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(X < 15) = P(X \leqslant 14) \approx 0,9750.}$
   (b) au moins 10 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(X \geqslant 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 0,4120.}$
   (c) plus de 17 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(X > 17) = 1 - P(X \leqslant 17) \approx 0,0017.}$
   (d) entre 8 et 20 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(8 \leqslant X \leqslant 20) = P(X \leqslant 20) - P(X \leqslant 7) \approx 0,7025.}$
3. Combien d'adhérents se présentent en moyenne le lundi ? Justifier.
   $E(X) = np = 45 \times 0,2 = 9$.
   En moyenne, 9 adhérents se présentent le lundi.

Exercice 3 (1 point)
Soit z le nombre complexe défini par $z = \frac{1}{3+\mathrm{i}}$. Calculer le module de z.

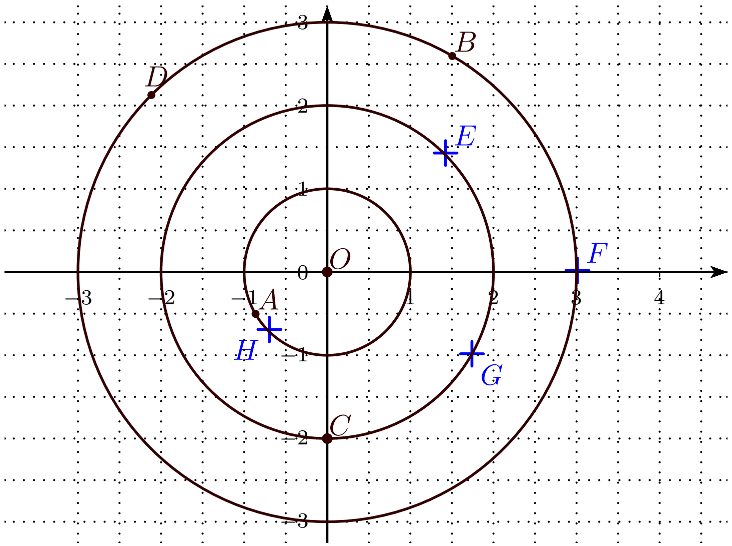
$z = \frac{1}{3+\mathrm{i}} = \frac{3-\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}\mathrm{i}$.

Donc $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{-1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Exercice 4 (4 points)

1. Lire graphiquement le module et un argument des affixes des points A, B, C et D.
$|z_A| = 1$, et $\arg(z_A) = \dfrac{7\pi}{6} \quad [2\pi]$.
$|z_B| = 3$, et $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
$|z_C| = 2$, et $\arg(z_C) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
$|z_D| = 3$, et $\arg(z_D) = \dfrac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$.

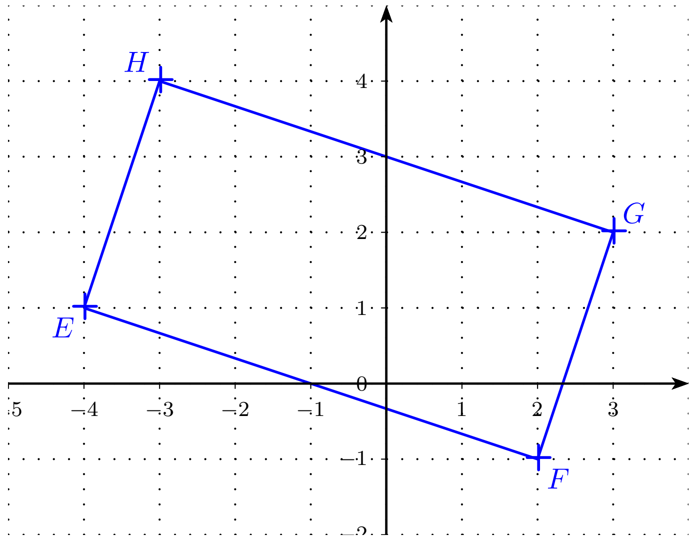
2. Placer dans le repère les points E, F, G et H tels que :
l'affixe de E a pour module 2 et argument $\dfrac{\pi}{4}$,
l'affixe de F a pour module 3 et argument 0,
l'affixe de G a pour module 2 et argument $-\dfrac{\pi}{6}$,
l'affixe de H a pour module 1 et argument $\dfrac{5\pi}{4}$.
On fera bien apparaître les traits de construction utiles.



Exercice 5 (5 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points E, F, G, H d'affixes respectives $z_E = -4+\mathrm{i}$, $z_F = 2-\mathrm{i}$, $z_G = 3+2\mathrm{i}$, et $z_H = -3+4\mathrm{i}$.

1. Placer ces quatre points.



2. Déterminer la nature précise du quadrilatère $EFGH$. Justifier.
$EFGH$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.
$z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = 2 - \mathrm{i} - (-4+\mathrm{i}) = 6 - 2\mathrm{i}$.
$z_{\overrightarrow{HG}} = z_G - z_H = 3 + 2\mathrm{i} - (-3+4\mathrm{i}) = 6 - 2\mathrm{i}$.
Donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$: $EFGH$ et un parallélogramme.
Comme c'est un parallélogramme, $EFGH$ est un rectangle ssi ses diagonales sont de même longueur.
$EG = |z_G - z_E| = |3+2\mathrm{i} - (-4+\mathrm{i})| = |7+\mathrm{i}| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$.
$FH = |z_H - z_F| = |-3+4\mathrm{i} - (2-\mathrm{i})| = |-5+5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50}$.
Donc $EG = FH$.
$\boxed{\text{$EFGH$ est un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur, donc $EFGH$ est un rectangle.}}$

Exercice 6 (bonus, 1 point)

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
On note A le point d'affixe $z_A = 1 + \mathrm{i}$.
Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - (1+\mathrm{i})| = 4$? Justifier.
$|z - (1+\mathrm{i})| = 4$ signifie que $AM = 4$.
L'ensemble des points M tels que $AM = 4$ est le cerlce de centre A et de rayon 4.
$\boxed{\text{Donc c'est le cercle de centre $A(1;1)$ et de rayon 4.}}$

Contrôle n° 7
Éléments de correction du sujet 2

Exercice 7 (5 points)
Alain, joueur de tennis confirmé, rencontre ses partenaires de club. Sa probabilité de succès contre ces joueurs est de 0,82. Il joue trois matchs consécutifs et les résultats de ses matchs sont indépendants les uns des autres.
On arrondira les probabilités à 10^{-3} près.

1. Construire un arbre pondéré associé à cette situation. Voir sujet 1, on adapte avec $p = 0,82$, et $1 - p = 0,18$.
2. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de matchs gagnés.
   (a) Montrer que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
   On répète 3 épreuves de Bernoulli (Alain gagne ou perd le match) identiques et indépendantes de même paramètre $p = 0,82$. La variable$X$ qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,82$.
   (b) Calculer la probabilité qu'il remporte exactement un match.
   $\boxed{P(X = 1) = 3 \times 0,82^1 \times 0,18^2 \approx 0,080.}$
   (c) Calculer la probabilité qu'il remporte au moins un match.
   $\boxed{P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,18^3 \approx 0,994.}$
   (d) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
   $E(X) = np = 3 \times 0,82 = 2,46$.
   En moyenne, Alain gagne 2,46 matchs sur des séries de 3 rencontres avec ses partenaires de club.

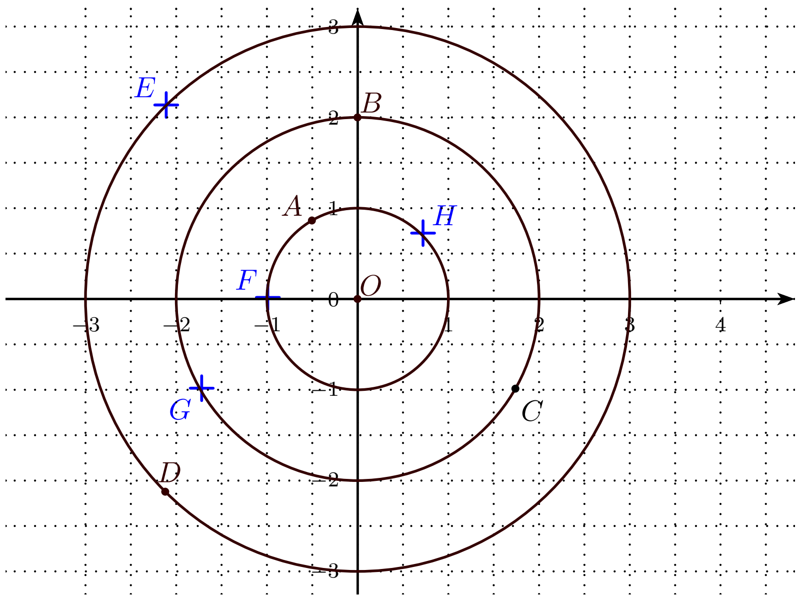
Exercice 8 (5 points)
Un club sportif propose à ses adhérents d'utiliser gratuitement sa salle de musculation un jour par semaine du lundi au jeudi (mais pas le vendredi ni le week-end).
44 adhérents choisissent au hasard sans se consulter un jour d'entraînement.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'adhérents qui choisissent le lundi.

1. X suit une loi binomiale, donner les paramètres de cette loi (sans justifier).
   $\boxed{n = 44, \text{ et } p = \frac{1}{4} = 0,25}$
2. Déterminer la probabilité (arrondie à 10^{-4}) que :
   (a) plus de 16 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(X > 16) = 1 - P(X \leqslant 16) \approx 0,0318.}$
   (b) moins de 10 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(X < 10) = P(X \leqslant 9) \approx 0,3086.}$
   (c) au moins 12 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(X \geqslant 12) = 1 - P(X \leqslant 11) \approx 0,4199.}$
   (d) entre 5 et 15 adhérents se présentent le lundi.
   $\boxed{P(5 \leqslant X \leqslant 15) = P(X \leqslant 15) - P(X \leqslant 4) \approx 0,9302.}$
3. Combien d'adhérents se présentent en moyenne le lundi ? Justifier.
   $E(X) = np = 44 \times 0,25 = 11$.
   En moyenne, 11 adhérents se présentent le lundi.

Exercice 9 (1 point)
Soit le nombre complexe défini par $z = \dfrac{1}{6 - \mathrm{i}}$. Calculer le module de z.
$z = \dfrac{1}{6-\mathrm{i}} = \dfrac{6+\mathrm{i}}{6^2 + (-1)^2} = \dfrac{6}{37} + \dfrac{1}{37}\mathrm{i}$.
Donc $|z| = \sqrt{\left(\dfrac{6}{37}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{37}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{36}{1369} + \dfrac{1}{1369}} = \sqrt{\dfrac{37}{1369}} = \sqrt{\dfrac{1}{37}} = \dfrac{\sqrt{37}}{37}$.

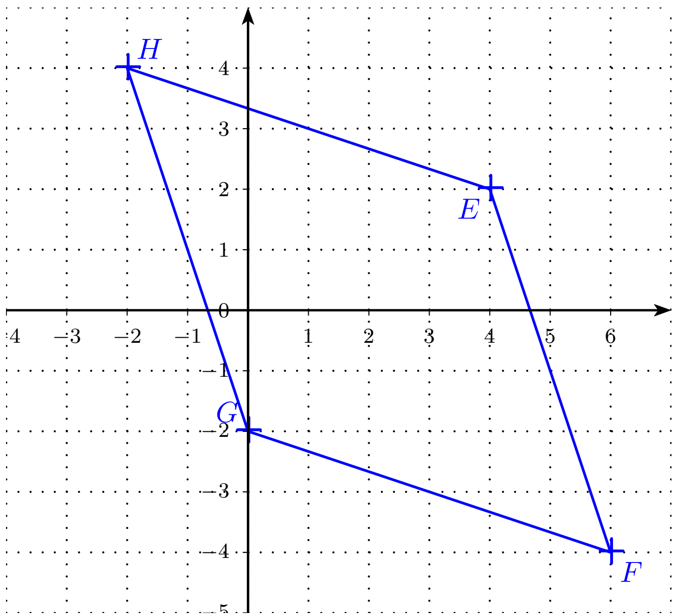
Exercice 10 (4 points)
1. Lire graphiquement le module et un argument des affixes des points A, B, C et D.
   $|z_A| = 1$, et $\arg(z_A) = \dfrac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   $|z_B| = 2$, et $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
   $|z_C| = 2$, et $\arg(z_C) = -\dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.
   $|z_D| = 3$, et $\arg(z_D) = \dfrac{5\pi}{4} \quad [2\pi]$.

2. Placer dans le repère les points E, F, G et H tels que :
l'affixe de E a pour module 3 et argument $\dfrac{3\pi}{4}$,
l'affixe de F a pour module 1 et argument π,
l'affixe de G a pour module 2 et argument $\dfrac{7\pi}{6}$,
l'affixe de H a pour module 1 et argument $\dfrac{\pi}{4}$.
On fera bien apparaître les traits de construction utiles.



Exercice 11 (5 points)
Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, on considère les points E, F, G, H d'affixes respectives $z_E = 4+2\text{i}$, $z_F = 6-4\text{i}$, $z_G = -2\text{i}$, et $z_H = -2+4\text{i}$.

1. Placer ces quatre points.



2. Déterminer la nature précise du quadrilatère $EFGH$. Justifier.
$EFGH$ est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.
$z_{\overrightarrow{EF}} = z_F - z_E = 6-4\text{i} - (4+2\text{i}) = 2-6\text{i}$.
$z_{\overrightarrow{HG}} = z_G - z_H = -2\text{i} - (-2+4\text{i}) = 2-6\text{i}$.
Donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$, et $EFGH$ est un parallélogramme.
Comme c'est un parallélogramme, $EFGH$ est un losange ssi il a deux côtés adjacents de même longueur.
$EF = |z_F - z_E| = |2-6\text{i}| = \sqrt{2^2+(-6)^2} = \sqrt{40}$.
$EH = |z_H - z_E| = |-2+4\text{i}-(4+2\text{i})| = |-6+2\text{i}| = \sqrt{(-6)^2+2^2} = \sqrt{40}$.
Donc $EF = EH$.
$\boxed{\text{$EFGH$ est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur, donc $EFGH$ est un losange.}}$

Exercice 12 (bonus, 1 point)
On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.
On note A le point d'affixe $z_A = 1+\text{i}$.
Quel est l'ensemble des points M d'affxe z tels que $|z-(1+\text{i})| = 4$? Justifier.
$|z-(1+\text{i})| = 4$ signifie que $AM = 4$.
L'ensemble des points M tels que $AM = 4$ est le cerlce de centre A et de rayon 4.
$\boxed{\text{Donc c'est le cercle de centre } A(1;1) \text{ et de rayon 4.}}$