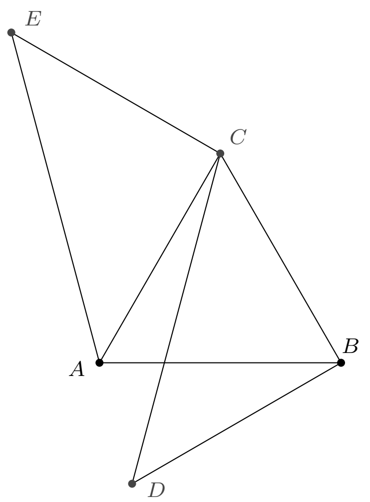
Correction l'exercice 1 de la fiche sur les angles

Exercice 1

Soient A, B, C, D et E cinq points du plan orienté tel que :

- ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$
- ACE et BDC sont deux triangles rectangle isocèles tels que

$$(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \text{ et } (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi).$$



1. Déterminer, en justifiant, une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$.
   D'après les données, le triangle ACE est rectangle isocèle en C.
   $\widehat{CAE} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
   $\boxed{\text{Comme le triangle } ACE \text{ est direct, } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = +\frac{\pi}{4} \quad [2\pi].}$
2. Déterminer, en justifiant, une mesure de $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$.
   Comme ABC est équilatéral, $AB = BC$.
   Comme BCD est isocèle en B, $BC = BD$.
   Donc $AB = BD$: le triangle ABD est isocèle en B.
   Comme ABC est équilatéral direct, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
   D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) &= (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \quad [2\pi] \\
-\frac{\pi}{2} &= (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) - \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \\
(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) &= -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

   Donc $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$.
   Par somme des angles dans le triangle ABD isocèle en B, $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$.
   $\boxed{\text{Enfin, comme } ADB \text{ est direct, } (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = +\frac{5\pi}{12}.}$
3. Que peut-on dire des points D, A et E ? (Justifier)
   D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) &= (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) \quad [2\pi] \\
&= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\
&= \frac{5\pi + 4\pi + 3\pi}{12} \quad [2\pi] \\
&= \pi \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'angle } \widehat{DAE} \text{ est plat, donc les points } D,\ A,\ E \text{ sont alignés (et } A \in [DE]).}$

Correction du devoir maison n° 10

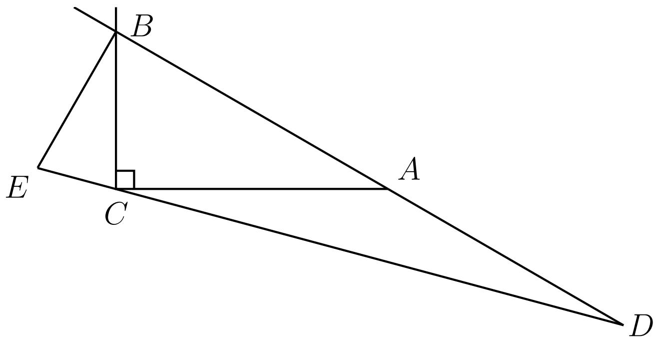
Exercice 2

Soit un triangle ABC direct et rectangle en C tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{6} \quad [2\pi]$.

Soit D le point de la droite (AB) tel que ACD soit un triangle direct et isocèle en A.

Soit E le point tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et $BC = BE$.

1. Figure.



2. (a) Déterminons une mesure de $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.
D'après la définition du point D, l'angle $\widehat{BAD}$ est plat.
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \pi \ [2\pi]$.
D'où

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) &= \pi - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ [2\pi] \\ &= \pi - \frac{\pi}{6} \ [2\pi] \\ &= \frac{5\pi}{6} \ [2\pi].\end{aligned}$$

Comme la somme des angles d'un triangle est π et ACD est isocèle en A, l'angle géométrique $\widehat{CDA}$ mesure $\dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{12}$.
Enfin, il est clair que ACD est un triangle direct, donc la mesure principale de $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$ est positive.
Donc $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = \dfrac{\pi}{12} \ [2\pi]$.

(b) Déterminons une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$.
Par somme des angles dans le triangle ABC,
$\widehat{CBA} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
Comme le triangle BAC est indirect,
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.
D'après la relation de Chasles,
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) = -\dfrac{\pi}{2} \ [2\pi]$.
D'où

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}) &= -\frac{\pi}{2} - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \ [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \ [2\pi] \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \ [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{6} \ [2\pi].\end{aligned}$$

3. On va montrer que l'angle $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE})$ est plat.
On a vu dans les questions précédentes que $\widehat{DCA} = \dfrac{\pi}{12}$ (angle à la base dans le triangle ACD isocèle en A).
Comme CDA est direct, $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}) = \dfrac{\pi}{12} \ [2\pi]$.
Comme le triangle BCE est isocèle en B et $\widehat{CBE} = \dfrac{\pi}{6}$, on trouve facilement une mesure de l'angle $\widehat{BCE}$:
$\widehat{BCE} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{5\pi}{12}$.
Le triangle CBE étant direct, $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}) = \dfrac{5\pi}{12} \ [2\pi]$.

Alors, d'après la relation de Chasles,

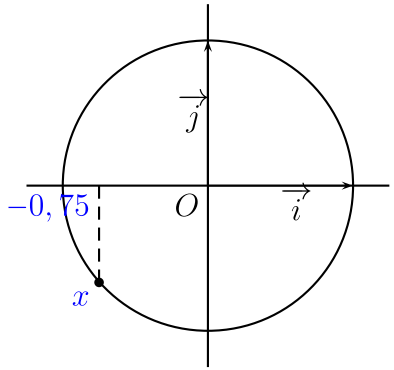
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE}) &= (\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CE})\ [2\pi]\\ &= \frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]\\ &= \pi\ [2\pi]\end{aligned}$$

Donc l'angle $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CE})$ est plat, et $C\in[DE]$.

Exercice 3 (98 p 179)

Soit x un réel de $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Sachant que $\cos x = -\frac{3}{4}$, placer l'image de x sur le cercle trigonométrique.



2. Calculer $\sin x$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$.
   Donc $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$.
   Donc $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Comme $x\in\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x\leqslant 0$. $\boxed{\text{Donc } \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}}$
3. Calculer $\cos(\frac{\pi}{2}+x)$, $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(\pi-x)$, $\sin(x+\pi)$, et $\sin(\pi-x)$.
   $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x = -\frac{3}{4}$.
   $\cos(x+\pi) = -\cos x = \frac{3}{4}$.
   $\cos(\pi-x) = -\cos x = \frac{3}{4}$.
   $\sin(x+\pi) = -\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   $\sin(\pi-x) = \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.