1G. Interrogation n° 8
Correction du sujet 1

Exercice 1 (cours, 2 points)

1. Donner l'expression du produit scalaire faisant intervenir un cosinus.
Pour tous points A, B, C distincts du plan,
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

2. Formule du projeté orthogonal.
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
Si on note $\overrightarrow{v'}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v'}$

Exercice 2 (1 point)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 4$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = -3$.

1. $(-2\overrightarrow{u}) \cdot (4\overrightarrow{v}) = -2 \times 4 \times (\overrightarrow{u}/cdot\overrightarrow{v}) = -8 \times 4 = -32$.
2. $(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 4 - (-3) = 7$.

Exercice 3
Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Justifier.

1. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 2$, $BC = 3$.
Comme $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.}$

2. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 6$.
Soit C' le projeté orthogonal de C sur (AB).
Comme ABC est isocèle en C, la hauteur issue de C est aussi une médiane, donc C' est le milieu de $[AB]$.
D'après la formule du projeté,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'} \\ &= AB \times \frac{1}{2}AB \\ &= 6 \times \frac{6}{2} \\ &= 18 \end{aligned}$$
$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18.}$

3. $AB = 4$, $BC = 3$, et $AC = 6$.
Par la relation de Chasles sur les vecteurs, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.
D'après une formule du produit scalaire avec les normes,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(16 + 36 - 9) \\ &= \frac{43}{2} \end{aligned}$$
$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 21.5.}$

4. Dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, $A(-5; 2)$, $B(-2; -1)$ et $C(4; 0)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.
D'après l'expression du produit scalaire en repère orthonormé :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= xx' + yy' \\ &= 3 \times 9 - 3 \times (-2) \\ &= 33 \end{aligned}$$
$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 33.}$

5. $AB = 6$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.
D'après la formule du cosinus,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 7 \times 6 \times \cos(\frac{\pi}{6}) \\ &= 7 \times 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 21\sqrt{3} \end{aligned}$$
$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 21\sqrt{3}.}$

Exercice 4 (2 points)
Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2; 3)$, $B(-4; 2)$, $C(1; -1)$, et $D(5 - a; a)$ où a est un nombre réel. Déterminer a pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.
$(AB) \perp (CD)$ ssi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-a\\a+1\end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = xx'+yy' = -6(4-a)+(-1)\times(a+1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -24+6a-a-1 = 5a-25$.

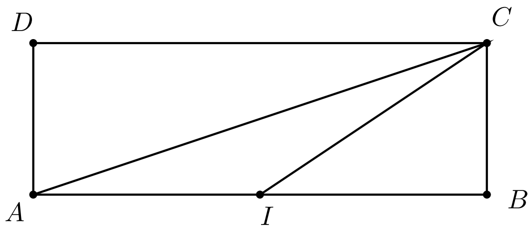
Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ ssi $5a-25=0$ ssi $a=5$.

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $a=5$, soit $D(0;5)$.

Exercice 5 (5 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB=6$ et $AD=2$.

On note I le milieu de $[AB]$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :
   $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD}$.
   On raisonne par projeté orthogonal dans les deux cas.
   $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB} = -BC^2 == -2^2 = -4$
   $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{CD} = -DC^2 = -6^2 = -36$

2. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$.
   Par relation de Chasles et linéarité,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI} &= (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI})\\ &= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BI}\\ &= 0+CD\times BI+DA\times CB+0\\ &= 6\times 3+2\times 2\\ &= 22\end{aligned}$$

   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{ACI})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ à un degré près.
   En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BCI et BCA, on calcule les longueurs CI et CA.
   $CI^2 = CB^2+BI^2 = 2^2+3^2 = 13$, donc $CI=\sqrt{13}$.
   $CA^2 = CB^2+BA^2 = 2^2+6^2 = 40$, donc $CA=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.
   D'après la formule du cosinus,
   $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI} = CA\times CI\times\cos(\widehat{ACI})$.
   Donc $22 = \sqrt{13}\times 2\sqrt{10}\times\cos(\widehat{ACI})$
   $\boxed{\cos(\widehat{ACI}) = \dfrac{22}{\sqrt{13}\times 2\sqrt{10}} = \dfrac{11\sqrt{130}}{130}.}$
   Avec la calculatrice, $\boxed{\widehat{ACI}\approx 15 \text{ degrés.}}$

Exercice 6 (3 points)

Soit $ABCD$ un losange de centre O, tel que $AC=6$ et $BD=14$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$. Justifier.
   Par projeté, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC} = -OA\times AC = -3\times 6 = -18$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$. Justifier.
   On procède par relation de Chasles et linéarité.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})\\ &= \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}\\ &= AO^2+0+0-OB^2\\ &= 3^2-7^2\\ &= 9-49\\ &= -40\end{aligned}$$

Exercice 7 (bonus, 1 point)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-3;-3)$, $B(-4;4)$, et $C(5;1)$. Déterminer les coordonnées du pied H de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

$H\in(BC)$ et $(AH)\perp(BC)$.

Notons $H(x;y)$.

$\overrightarrow{BC}(9;-3)$; $\overrightarrow{BH}(x+4;y-4)$; $\overrightarrow{AH}(x+3;y+3)$.

Comme $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires, $(xy'-yx'=0)$, soit $-3(x+4)-9(y-4)=0$, donc $-3x-9y+24=0$, soit $x+3y-8=0$.

Comme $(AH)\perp(BC)$, $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, soit $9(x+3)+(-3)(y+3)=0$, soit $9x-3y+18=0$, ou $3x-y+6=0$.

On résout le système $\begin{cases}x+3y-8=0\\3x-y+6=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=-3y+8\\3(-3y+8)-y+6=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$.

Donc $H(-1;3)$.

Interrogation n$^{\text{o}}$ 8 Éléments de réponses du Sujet 2

Exercice 8 (cours, 2 points)

1. Expression du produit scalaire en repère orthonormé. Soient $\overrightarrow{u}(x;y)$ et $\overrightarrow{v}(x';y')$ deux vecteurs dans un repère orthonormé du plan.
   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = xx' + yy'$
2. Énoncer les propriétés de symétrie et de linéarité du produit scalaire.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$, et k réel,
   Symétrie : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
   Linéarité : $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$ et $(k\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = k\times(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})$

Exercice 9 (1 point)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs tels que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 4$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = -3$.

1. Calculer $(-9\overrightarrow{u})\cdot(5\overrightarrow{v})$. $\boxed{(-9\overrightarrow{u})\cdot(5\overrightarrow{v}) = -180.}$
2. Calculer $(\overrightarrow{v}-7\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u}$. $\boxed{(\overrightarrow{v}-7\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u} = 25.}$

Exercice 10 (6 points)

Voir le sujet 1 pour les méthodes.

1. $AB = 5$, $BC = 3$, et $AC = 6$. $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 26}$
2. ABC est un triangle rectangle en A, $AB = 2$, $AC = 5$. $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0}$
3. ABC est un triangle isocèle rectangle en C, et de base $AB = 10$.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 50}$
4. Dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$, $A(-5;2)$, $B(-2;-1)$, $C(4;0)$.
   $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 33}$
5. $AB = AC = 6$, et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$. $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18}$

Exercice 11 (2 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(2;3)$, $B(-4;2)$, $C(1;-1)$, et $D(a;-3)$ où a est un nombre réel. Déterminer a pour que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires. $(AB)\perp(CD)$ ssi $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} a-1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = xx' + yy' = -6(a-1) + (-1)\times(-2)$

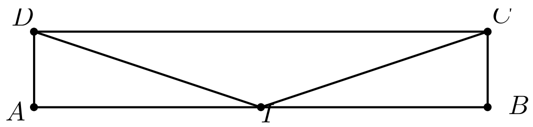
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -6a + 6 + 2 = -6a + 8$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ ssi $-6a + 8 = 0$ ssi $a = \dfrac{4}{3}$.

$\boxed{\text{Les droites } (AB) \text{ et } (CD) \text{ sont perpendiculaires ssi } a = \dfrac{4}{3}, \text{ soit } D\left(\dfrac{4}{3};-3\right).}$

Exercice 12 (5 points)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 2$.
On note I le milieu de $[AB]$.



1. Calculer, en justifiant la réponse, les produits scalaires :
   $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{IC}$
   On raisonne par projeté orthogonal.
   $\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CB} = CB^2 = 2^2 = 4. \\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IB} = -AB\times IB = -6\times 3 = -18 \end{array}}$
2. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} &= (\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} \\ &= -IA\times IB + 0 + 0 + AD\times BC \\ &= -3\times 3 + 2\times 2 \\ &= -5 \end{aligned}$$

   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{CID})$ puis la mesure de l'angle $\widehat{CID}$ à un degré près.
   En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles BCI et ADI, on calcule les longueurs IC et ID.
   $CI^2 = CB^2 + BI^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, donc $CI = \sqrt{13}$.
   De même, on montre que $ID = \sqrt{13}$.
   D'après la formule du cosinus,
   $\overrightarrow{ID}\cdot\overrightarrow{IC} = ID\times IC\times\cos(\widehat{CID})$.
   Donc $-5 = \sqrt{13}\times\sqrt{13}\times\cos(\widehat{CID})$
   $\boxed{\cos(\widehat{CID}) = \dfrac{-5}{\sqrt{13}^2} = -\dfrac{5}{13}.}$
   Avec la calculatrice, $\boxed{\widehat{CID}\approx 113 \text{ degrés.}}$

Exercice 13 (3 points)

Voir sujet 1

Exercice 14 (bonus, 1 point)

Voir sujet 1