Seconde. Interrogation de mathématiques n° 7
Correction du Sujet 1

Exercice 1 (questions de cours, 2 points)

1. Énoncer les trois identités remarquables.
   Pour tous réels a et b,
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

2. Donner la définition d'un nombre premier.
   Un entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Exercice 2 (4 points)

1. Décomposer en produit de facteurs premiers 1170 et 3300.
   $1170 = 117 \times 10 = 9 \times 13 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 13$.
   $3300 = 33 \times 100 = 3 \times 11 \times 4 \times 25 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11$.

2. En déduire le plus grand diviseur commun à 1170 et 3300.
   $PGCD(1170; 3300) = 2 \times 3 \times 5 = 30$.

3. Déduire de la question 1 le plus petit commun multiple de 1170 et 3300.
   $PPCM(1170; 3300) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 13 = 128700$.

4. Déterminer $\dfrac{1170}{3300}$, puis $\dfrac{1}{1170} - \dfrac{1}{3300}$ sous forme de fraction irréductible.
   $\dfrac{1170}{3300} = \dfrac{2 \times 3^2 \times 5 \times 13}{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11} = \dfrac{3 \times 13}{2 \times 5 \times 11} = \dfrac{39}{110}$.
   $\dfrac{1}{1170} - \dfrac{1}{3300} = \dfrac{1}{2 \times 3^2 \times 5 \times 13} - \dfrac{1}{2^2 \times 3 \times 5^2 \times 11}$
   $\dfrac{1}{1170} - \dfrac{1}{3300} = \dfrac{2 \times 5 \times 11 - 3 \times 13}{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11 \times 13} = \dfrac{71}{128700}$.

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie que $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 27x + 18$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (6-x)(5x+3)$.
   En développant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $(6-x)(5x+3) = 30x + 18 - 5x^2 - 3x = -5x^2 + 27x + 18 = f(x)$.
   $\boxed{\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = (6-x)(5x+3).}$

2. Calculer $f(6)$ et $f(1+\sqrt{2})$. Détailler les calculs.
   $f(6) = (6-6)(5 \times 6 + 3) = 0 \times 33 = 0$.
   $f(1+\sqrt{2}) = -5(1+\sqrt{2})^2 + 27(1+\sqrt{2}) + 18$
   $f(1+\sqrt{2}) = -5(3+2\sqrt{2}) + 27 + 27\sqrt{2} + 18$
   $f(1+\sqrt{2}) = -15 - 10\sqrt{2} + 45 + 27\sqrt{2}$
   $f(1+\sqrt{2}) = 30 + 17\sqrt{2}$.

3. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = -5x^2$.
   $f(x) = -5x^2$ ssi $-5x^2 + 27x + 18 = -5x^2$ ssi $27x + 18 = 0$ ssi $x = -\dfrac{18}{27} = -\dfrac{2}{3}$.
   $\boxed{\text{La solution de l'équation est } -\dfrac{2}{3}.}$

Exercice 4 (3 points)

1. (a) Faire tourner l'algorithme suivant à la main.

   $S \leftarrow 0$
   `Pour` k `variant de 1 à 3`
   $\quad S \leftarrow S + \dfrac{1}{k^2}$
   `FinPour`

k		1	2	3
S	0	$0 + \frac{1}{1^2}$	$0 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$	$0 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$

   (b) Quelle valeur contient la variable S en fin d'algorithme ? (donner le résultat sous forme de fraction irréductible).
   À la fin,
   $S = 0 + \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{36+9+4}{36} = \dfrac{49}{36}$.

2. Adapter l'algorithme pour qu'il calcule la somme suivante (ré-écrire un nouvel algorithme entier) :
$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{51}.$$
On reconnaît les premiers entiers impairs aux dénominateurs, et $1=2\times 0+1$, et $51=2\times 25+1$.

```
S ← 0
Pour k variant de 0 à 25
        S ← S + 1/(2k+1)
FinPour
```

Exercice 5 (3 points)

Soit n un entier relatif. On considère le nombre $A=(-5n+4)(3n+1)$.

1. Montrer que si n est pair alors $-5n+4$ est pair.
   Si n est pair il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n=2k$.
   Alors, $-5n+4=-5\times 2k+2\times 2=2(-5k+2)$.
   Donc $-5n+4$ est pair.
2. Montrer que si n est impair alors $3n+1$ est pair.
   Si n est impair il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n=2k+1$.
   Alors, $3n+1=3\times(2k+1)+1=6k+4=2(3k+2)$.
   Donc $3n+1$ est pair.
3. Que peut-on en déduire sur la parité de A ?
   D'après les questions 1 et 2, quelle que soit la parité de n, $A=(-5n+4)(3n+1)$ est un produit de 2 entiers dont l'un est pair.
   $\boxed{\text{Donc } A \text{ est toujours pair.}}$

Exercice 6 (2 points)

1. Donner les valeurs prises par k, puis préciser le nombre total de tours lors de l'instruction : `for k in range(2,11):`
   k prend les valeurs 2 ;3 ;4 ;. . . ;10, ce qui fait 9 tours de boucle.
2. Donner une instruction Python qui fait prendre à k les valeurs 0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5.
   `for k in range(6):`
3. Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier non nul n et qui renvoie $A(n)=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

```
def A(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+k**2
    return(S)
```

Exercice 7 (1 point)

On donne une fonction en langage Python.

```
def Capital(n) :
  C=4500
  for k in range(n) :
    C=C*1,025
  return(C)
```

1. Que renvoie `Capital(3)` ?
   $4500\times 1,025^3\approx 4846$.
   Cela renvoie 4846 environ.

Exercice 8 (1 point)

Montrer que le nombre 361 361 n'est pas premier.
$361\,361=361\times 1000+361=361\times(1000+1)=361\times 1001$.
Donc ce nombre n'est pas premier (il a des diviseurs autres que 1 et lui même : 361 par exemple).