Notions de logique

I Assertions et connecteurs logiques

Définition
Une assertion est un énoncé mathématique auquel on attribue l'une des deux valeurs logiques : le vrai (V) ou le faux (F).

Exemple :
L'assertion "$1+1=2$" est vraie.
L'assertion "$2+2=5$" est fausse.
Les propriétés, théorèmes sont des assertions vraies.

Définition
Le quantificateur universel, qui signifie "pour tout" , est noté $\forall$.
Le quantificateur existentiel, qui signifie "il existe", est noté $\exists$.

Exercice n° 1
Traduire en langage mathématique (avec des quantificateurs) :

1. "Un carré est toujours positif".
2. "L'équation $\dfrac{1}{x}=3$ a au moins une solution réelle".
3. "Il existe au moins deux réels dont la somme est égale au produit".
4. "La somme de deux entiers reste un nombre entier".
5. "Tout nombre réel peut être encadré (au sens large) par deux entiers consécutifs".

Définition
Il existe 5 connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique :

— Négation (non) : à toute assertion $\mathcal{A}$, on peut associer sa négation, notée (non $\mathcal{A}$).
(non $\mathcal{A}$) est vraie si et seulement si $\mathcal{A}$ est fausse.
— Disjonction (ou) :
L'assertion ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie lorsque au moins l'une des assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est vraie.
— Conjonction (et) :
L'assertion ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) est vraie lorsque les deux assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vraies.
— Implication ($\Rightarrow$) :
$(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ est vraie si l'assertion (non $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie.
— Équivalence ($\Leftrightarrow$) :
$(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ est vraie si les assertions $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ et $(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$ sont vraies.

Remarque

— $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ s'écrit aussi "Si $\mathcal{A}$ (vraie), alors $\mathcal{B}$ (vraie)".
— $(\mathcal{A}\Leftrightarrow\mathcal{B})$ s'écrit aussi " $\mathcal{A}$ (vraie) si et seulement si $\mathcal{B}$ (vraie)".
— Le "ou" mathématique n'est pas exclusif :
si les assertions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont toutes les deux vraies, alors l'assertion ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) est vraie.

Exercice n° 2
Écrire les négations des assertions suivantes :

1. "Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$."
2. "Personne n'obtient jamais 20/20 à un contrôle de mathématiques".
3. "Pour passer en 1$^{\text{re}}$ S, il fallait être beau ou intelligent".
4. "Il existe des élèves de cette classe qui n'aiment ni les maths, ni la physique".
5. $\forall x\in\mathbb{R},\ (x^2=1)\Rightarrow(x=1)$.

Plus généralement,

Propriété

1. non ($\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$) équivaut à (non $\mathcal{A}$) ou (non $\mathcal{B}$).
2. non ($\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$) équivaut à (non $\mathcal{A}$) et (non $\mathcal{B}$).
3. non $(\forall x, \mathcal{A}(x))$ équivaut à $\exists x$, non $\mathcal{A}(x)$.
4. non $(\exists x, \mathcal{A}(x))$ équivaut à $\forall x$, non $\mathcal{A}(x)$.
5. non$(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ équivaut à ($\mathcal{A}$ et non $\mathcal{B}$).

Remarque (la réciproque)
La réciproque de l'implication $(\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{B})$ est $(\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{A})$.
Elle peut être vraie ou fausse (on ne peut rien dire en général).

Exemple :
La réciproque du théorème de Pythagore est vraie.
Soit $x\in\mathbb{R}$. L'implication $x>3\Rightarrow x^2>9$ est vraie.
Sa réciproque est ....
Elle est ...

Exercice n° 3
Étudier la réciproque des implications suivantes :

1. Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires.
2. Soit $a\in\mathbb{R}$. $(a\in\mathbb{N})\Rightarrow(a^2\in\mathbb{N})$.

II Quelques modes de raisonnement

II.1 Disjonction des cas

Exercice n° 4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-2|+1>6|x|$.

II.2 Démontrer à l'aide d'un contre-exemple

Rappel : non $(\forall x, \mathcal{A}(x))$ équivaut à $\exists x$, non $\mathcal{A}(x)$.
Pour montrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire un cas pour lequel elle n'est pas vraie.

Exercice n° 5
L'assertion "Pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 \geqslant x$" est-elle vraie ? Justifier.

II.3 Démonstration par contraposée

La contraposée de $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ est (non $\mathcal{B} \Rightarrow$ non $\mathcal{A}$).
Une implication et sa contraposée sont équivalentes.
Exemple :
Le théorème de Pythagore est :
....
Sa contraposée est :
....

Exercice n° 6
Soit ABC un triangle tel que $AB=\sqrt{6}$, $BC=2$ et $AC=3$. ABC est-il rectangle ?

II.4 Démonstration par l'absurde

Pour montrer qu'une propriété est vraie, on commence par supposer qu'elle est fausse, puis on montre par une suite d'implications que cela conduit à une contradiction.

Voir l'exercice n° 10 sur l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

II.5 Double inclusion pour montrer l'égalité de deux ensembles

Soient A et B deux ensembles.
$(A=B) \Leftrightarrow (A \subset B$ et $B \subset A)$.
Voir l'exercice n° 11.

III Exercices

Exercice n° 7
Soient a et b deux réels. Montrer que $(a+b>1) \Rightarrow (a>\frac{1}{2}$ ou $b>\frac{1}{2})$:

1. Par disjonction des cas.
2. Par contraposée.

Exercice n° 8
Pour qu'un nombre réel soit supérieur ou égal à 1, il suffit que son carré soit supérieur ou égal à 1.

1. Traduire cette phrase en langage mathématique.
2. Est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Exercice n° 9
On admet l'assertion "s'il pleut, alors je prends mon parapluie".

1. Aujourd'hui, il fait beau (il ne pleut pas).
   Quelle proposition est correcte ?
   1. J'ai un parapluie 2. Je n'ai pas de parapluie 3. On ne peut pas savoir.
2. Aujourd'hui, il pleut.
   Quelle proposition est correcte ?
   1. J'ai un parapluie 2. Je n'ai pas de parapluie 3. On ne peut pas savoir.
3. Aujourd'hui, je prends mon parapluie.
   Quelle proposition est correcte ?
   1. Il pleut 2. Il ne pleut pas 3. On ne peut pas savoir.
4. Aujourd'hui, je ne prends pas mon parapluie.
   Quelle proposition est correcte ?
   1. Il pleut 2. Il ne pleut pas 3. On ne peut pas savoir.

Exercice n° 10 : $\sqrt{2}$ est irrationnel
Partie 1
Soit n un entier naturel.

1. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair. Raisonner par contraposée.
2. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Partie 2
On va montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
On raisonne par l'absurde.
Supposons que l'on puisse écrire $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a et b entiers $(b \neq 0)$, et que la fraction soit sous forme irréductible.

1. Montrer que $a^2=2b^2$.
2. En déduire que a et b sont pairs.
3. Mettre en évidence une contradiction et conclure.

Exercice n° 11
Soient A et B deux points distincts du plan. On note I le milieu de $[AB]$.
Montrer que la droite perpendiculaire à $[AB]$ et passant par son milieu est l'ensemble des points équidistants de A et de B.

Exercice n° 12
Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$.
Déterminer une condition nécéssaire et suffisante à l'assertion suivante :
"$(a+b)^2 = a^2 + b^2$."