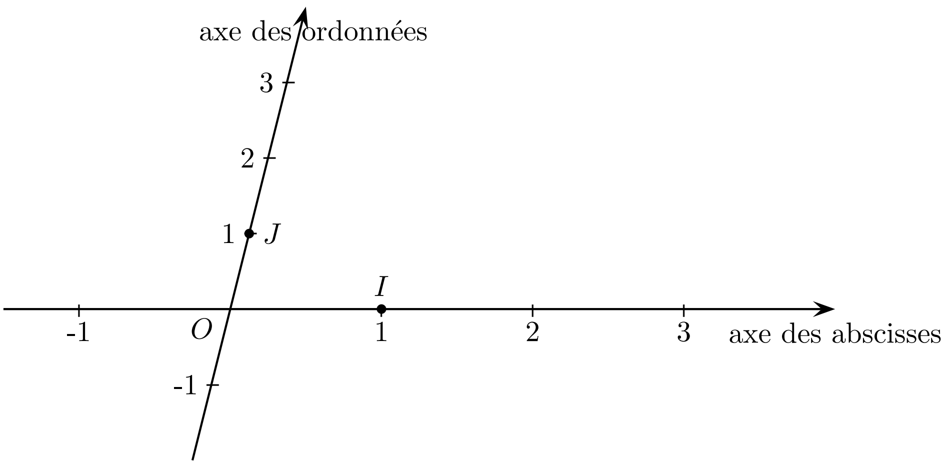
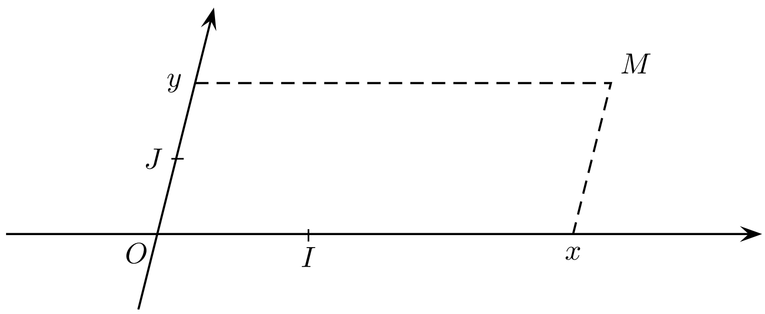
Chapitre 1 : Repérage dans le plan

I Repère du plan

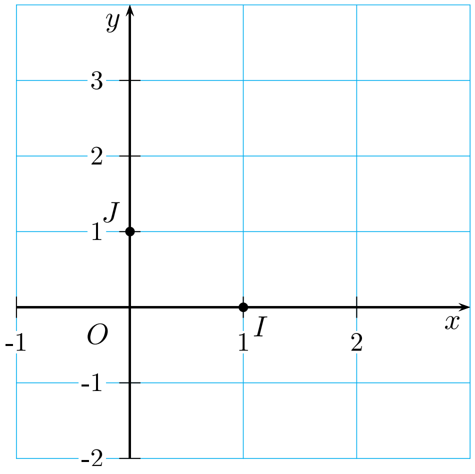
Définition
On définit un repère du plan par la donnée de 3 points non alignés O, I et J. Le repère se note $(O; I; J)$.
O est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses, la droite (OJ) est l'axe des ordonnées.



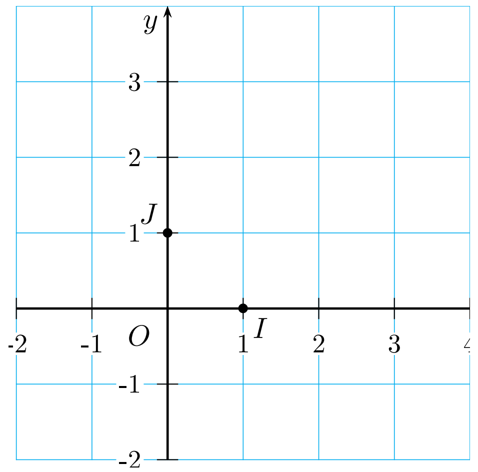
Définition (et propriété admise)
Dans un repère du plan $(O; I; J)$, tout point M est déterminé par un unique couple de réels $(x; y)$.
x est l'abscisse de M, et y est l'ordonnée de M.
On lit les coordonnées du point en traçant des parallèles aux axes du repère.



Remarque (cas particuliers)
Le repère est orthogonal lorsque les axes du repère sont perpendiculaires : $(OI) \perp (OJ)$ (le triangle OIJ est rectangle en O).
Le repère est orthonormé si les axes sont perpendiculaires et si l'on a la même unité de longueur sur les deux axes : $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$.
Cela revient à dire que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.



Repère orthogonal : $(OI) \perp (OJ)$.



Repère orthonormé : $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

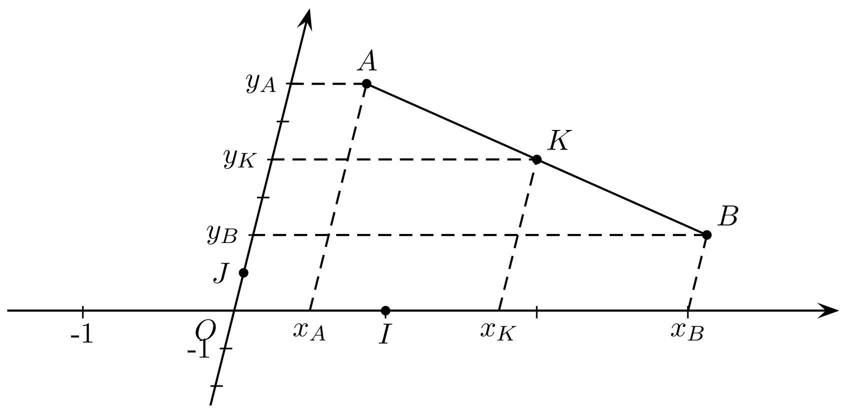
Exercice 1

1. Construire un parallélogramme $ABCD$.
2. On se place dans le repère $(A; B; D)$. Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
3. Placer le point E de coordonnées $(-1; 2)$ dans le repère $(A; B; D)$.

II Coordonnées du milieu d'un segment

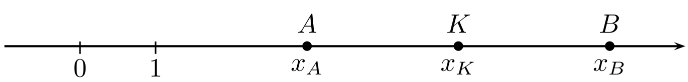
Propriété (Coordonnées du milieu)
Dans un repère du plan, on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, avec x_A, y_A, x_B, y_B réels.
Les coordonnées du milieu K du segment $[AB]$ sont données par :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2}.$$



Démonstration

1. On démontre la propriété sur un axe gradué :



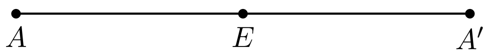
Soient $A(x_A)$, et $B(x_B)$ deux points sur un axe muni d'un repère.
Quitte à échanger A et B, on peut supposer que $x_A \leqslant x_B$.
Notons $K(x_K)$ le milieu de $[AB]$.
Alors, $AK = KB$, soit $x_K - x_A = x_B - x_K$.
Donc $2x_K = x_A + x_B$.
Finalement, $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

2. La démonstration dans le plan se fait en exploitant ce résultat et en utilisant le théorème de Thalès.

Exercice 2
Calculer les coordonnées du milieu d'un segment : ressource 131

Remarque (Symétrique par une symétrie centrale)
La propriété des coordonnées du milieu peut également servir à déterminer les coordonnées d'un poit par une symétrie centrale.

(A' est le symétrique de A par rapport à E) équivaut à (E est le milieu de $[AA']$).

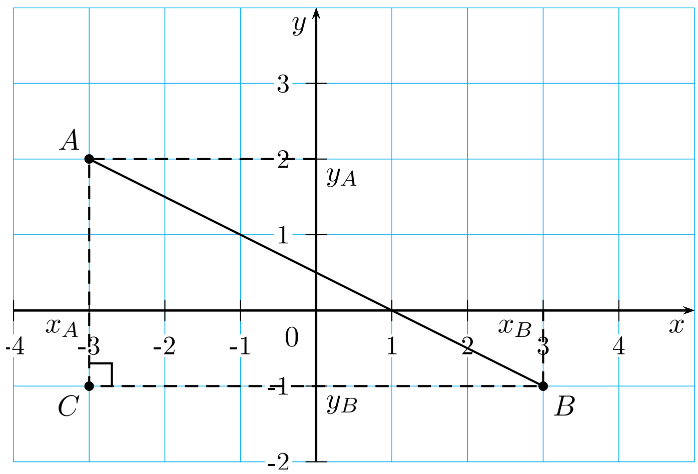


Exercice 3
1. Dans un repère du plan, placer les points $A(-2;-1)$ et $E(3;1)$.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du symétrique A' de A par rapport à E, puis placer A' sur la figure.[1]

III Distance en repère orthonormé

Théorème
On se place dans un repère orthonormé du plan.
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points (x_A, y_A, x_B, y_B réels).
La distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



1. On obtient $A'(8;3)$

Démonstration
On se place dans le cas où $x_A < x_B$ et $y_A > y_B$ (voir ci-dessus).
Soit C le point qui a la même abscisse que A et la même ordonnée que B.
Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = BC^2 + AC^2$.
Or, $BC = x_B - x_A$ et $AC = y_A - y_B$.
Donc

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2 \\
AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\
AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2}
\end{aligned}$$

En effet, $(y_A - y_B)^2 = (y_B - y_A)^2$ (deux nombres opposés ont le même carré).
Les autres cas se montrent de façon analogue. □

Exercice 4
Calculer la distance entre deux points de coordonnées fixées dans un repère orthonormal du plan : ressource 634

Exercice 5
1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-2;1)$, $B(4;-1)$ et $C(-1;4)$.
2. Calculer les longueurs AB, AC, et BC.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

Propriété (équation de cercle)
Soit $\Omega(a;b)$ dans un repère orthonormé. Soit $r > 0$.
Le cercle de centre Ω et de rayon r a pour équation

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Démonstration
Soit $M(x;y)$ un point du plan.
M appartient à $\mathscr{C}$ ssi $\Omega M = r$, ce qui équivaut à $\Omega M^2 = r^2$ car ΩM est positif (c'est une distance).
Il suffit de passer aux coordonnées dans cette dernière relation. □

IV Rappels sur les quadrilatères usuels

Remarque
Pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffit de montrer :
- que ses diagonales ont le même milieu ;
- ou que ses côtés opposés sont deux à deux parallèles ;
- ou que ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur (étant non croisé) ;
- ou qu'il a une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur (étant non croisé).

Pour montrer qu'un parallélogramme est un rectangle, il suffit de montrer :
- que ses diagonales sont de même longueur ;
- ou qu'il a un angle droit (calculer la longueur de deux côtés adjacents et d'une diagonale, puis tester la réciproque du théorème de Pythagore).

Pour montrer qu'un parallélogramme est un losange, il suffit de montrer :
- qu'il a deux côtés adjacents de même longueur ;

— ou que ses diagonales sont perpendiculaires.

Un carré est un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange.

Exercice 6

1. Placer dans un repère orthonormé les points $A(-2;1)$, $B(0;2)$, $C(4;-1)$ et $D(2;-2)$.
2. Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. $ABCD$ est-il un rectangle ?
4. $ABCD$ est-il un losange ?

V Algorithme de calcul de la distance entre deux points

Algorithme :
DÉBUT
Lire x_A, y_A, x_B, y_B
d prend la valeur $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Afficher d
FIN

Pour la programmation sur la calculatrice, voir aussi à la fin du manuel.

Algorithme en language TI.
On appelle le programme `DISTANCE`

```
: Disp "XA"
: Input M
: Disp "YA"
: Input N
: Disp "XB"
: Input O
: Disp "YB"
: Input P
: √((O − M)² + (P − N)²) → D
: Disp D
```

Algorithme en language Casio.
On appelle le programme `DISTANCE`

```
"XA"
? → M
"YA"
? → N
"XB"
? → O
"YB"
? → P
√((O − M)² + (P − N)²) → D
D ◢
```

Exemple pour tester l'algorithme :
Avec $A(-2;-1)$ et $B(1;4)$, on doit trouver comme valeur exacte $AB = \sqrt{34}$, soit environ 5,83.
La calculatrice doit afficher 5,830 951 895.
On vérifie facilement que $\sqrt{34} \approx 5{,}830\,951\,895$.

Remarque
Le programme précédent renvoie le plus souvent des valeurs approchées de la distance AB.

Exercice 7
Modifier et compléter l'algorithme pour faire afficher en plus la valeur de AB^2.

VI Exercices

Exercice 8
Déterminer les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme : ressource 482