

Devoir maison n° 9
Pour le jeudi 07 mars 2019

Exercice 1

Un organisateur annonce qu'à une loterie, il y aura exactement 1 billet gagnant 5000 euros, 5 billets gagnants 1000 euros et 50 billets gagnant 50 euros, sur un total de N billets.

Le prix d'achat d'un billet est de 5 euros.

On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur, c'est à dire le montant du lot gagné moins le prix du billet.

1. (a) Combien y a-t-il de billets non gagnants ?
(b) Quelles sont les valeurs possibles de X ?
(c) Déterminer, en fonction de N , la loi de probabilité de X .
2. Justifier que l'espérance de X est donnée par $E(X) = \frac{12500}{N} - 5$.
3. L'organisateur prévoit de vendre la totalité des billets et il souhaite faire un bénéfice de 2000 euros.
(a) Déterminer le nombre N de billets à émettre.
(b) En déduire la valeur exacte de $E(X)$.
(c) Calculer alors la probabilité de l'événement A « le gain du joueur est au moins égal à 45 euros ».

Exercice 2

On donne l'algorithme suivant :

```
DÉBUT
Entrer  $N$ 
 $J$  prend la valeur 0
  Pour  $I$  allant de 1 à  $N$ 
    affecter à  $A$  un entier aléatoire entre 1 et 6
    affecter à  $B$  un entier aléatoire entre 1 et 6
     $C$  prend la valeur  $A + B$ 
    Si  $C \leq 5$ 
      Alors  $J$  prend la valeur  $J + 1$ 
    Fin Si
  Fin Pour
Afficher  $J/N$ 
FIN
```

1. Que fait cet algorithme ?
2. De quelle valeur doit se rapprocher le nombre affiché lorsque N devient très grand ?
3. On propose le jeu suivant :
La mise est de 4 euros.
On lance deux dés cubiques équilibrés.
Si la somme des deux dés est inférieure ou égale à 5, on gagne 15 euros.
Sinon, on perd la mise.
(a) Adapter l'algorithme précédent pour qu'il simule N parties et affiche le gain (algébrique) total et le gain moyen du joueur en sortie, l'entier N étant donné en entrée.
(b) Ce jeu est-il équitable ? Justifier.

Exercice 3

1. Soit n un entier naturel. Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ prenant respectivement les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec les probabilités p_1, p_2, \dots, p_n .
Soient a et b deux nombres réels.
Montrer que $E(aX + b) = aE(X) + b$
2. Le nombre de repas servis par jours dans un restaurant scolaire est une variable aléatoire X d'espérance 500. Le coût d'un repas est de 4 euros et les coûts fixes journaliers sont de 100 euros.
Soit Y la variable aléatoire égale à la dépense totale journalière pour le restaurant.
Calculer $E(Y)$.