

## Exercices sur les dérivées et applications

### Exercice 1

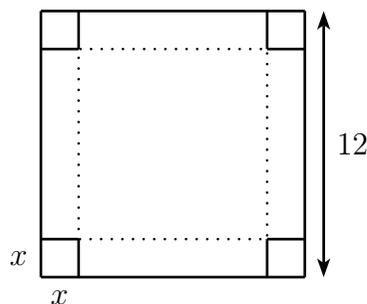
Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; 7]$  par  $f(x) = \frac{x^2}{3 - 4x}$ .

- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $[1; 7]$ , et calculer  $f'(x)$ .
- Déterminer un encadrement de  $f(x)$  valable pour tout  $x \in [1; 7]$ .

### Exercice 2

Dans un morceau de carton carré de 12 cm de côté, on découpe dans chaque coin des carrés de  $x$  cm de côté.

En relevant les bords (suivant les pointillés), on construit une boîte sans couvercle avec la feuille ainsi découpée.



- Expliquer pourquoi les valeurs possibles de  $x$  appartiennent à l'intervalle  $[0; 6]$ .
- Exprimer le volume de la boîte  $V(x)$  en fonction de  $x$ .
- Déterminer le volume maximal de la boîte. Justifier.

### Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-6; 3]$  par

$$f(x) = \frac{1}{6}(-x^3 - 3x^2 + 9x - 3).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Calculer  $f'(x)$ .
- En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $[-6; 3]$ .

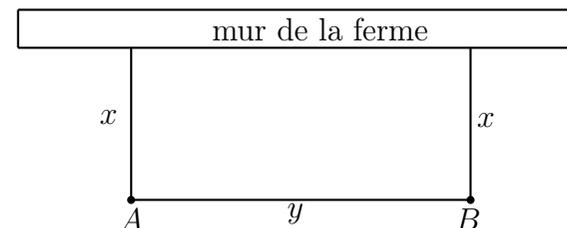
- La courbe de  $f$  admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses sur  $[-6; 3]$ ? Justifier. Si oui, donner une équation de chacune.
- Justifier que la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0 est la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ .
- Déterminer la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$ . Justifier.
- Tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$  dans un même repère orthonormé. On fera apparaître les tangentes parallèles à  $(Ox)$ .

### Exercice 4

Un fermier décide de réaliser un poulailler de forme rectangulaire le long du mur de sa maison.

Ce poulailler doit avoir une aire de  $288 \text{ m}^2$ .

Le but du problème est de déterminer où on doit placer les piquets  $A$  et  $B$  pour que la longueur de la clôture soit minimale.



La figure représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle  $x$  la distance séparant chaque piquet au mur et  $y$  la distance entre les 2 piquets  $A$  et  $B$ .

- Sachant que l'aire du poulailler est  $288 \text{ m}^2$ , exprimer  $y$  en fonction de  $x$ .
- Démontrer que la longueur du grillage est, pour  $x > 0$ ,  $l(x) = \frac{2x^2 + 288}{x}$ .
- Calculer la dérivée de  $l$ .
- Étudier les variations de  $l$  sur  $]0; +\infty[$ .
- En déduire les dimensions  $x$  et  $y$  pour lesquelles la clôture a une longueur minimale.

**Exercice 5**

Démontrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $0 \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{1}{2}$ .

Indication : on pourra étudier une fonction.

**Exercice 6**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Montrer que pour tout  $x \neq 1$ ,  $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$ .
- Montrer que pour tout  $x \neq 1$ ,  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ .
- En déduire le tableau de variations de  $f$ .
- On considère la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 2$ . Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .
- Tracer  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$  dans un même repère orthonormé.
- Montrer qu'il existe deux points de  $\mathcal{C}$  en lesquels la tangente a pour coefficient directeur  $-3$ .  
Donner alors une équation de chacune de ces tangentes.

**Exercice 7**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{-4x^2 + 16}{(x^2 + 4)^2}$ .
- Étudier les variations de  $f$  et donner son tableau de variation.
- (a) Calculer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.  
(b) Étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{T}$ .
- Donner deux nombres  $m$  et  $M$  tels que pour tout réel  $x$  de  $[-4; 4]$ , on ait  $m \leq f(x) \leq M$ . Justifier votre réponse.

**Exercice 5**

Démontrer que pour tout  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $0 \leq \frac{x+1}{x^2+3} \leq \frac{1}{2}$ .

Indication : on pourra étudier une fonction.

**Exercice 6**

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
- Montrer que pour tout  $x \neq 1$ ,  $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$ .
- Montrer que pour tout  $x \neq 1$ ,  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ .
- En déduire le tableau de variations de  $f$ .
- On considère la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x + 2$ . Étudier la position relative de  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$ .
- Tracer  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$  dans un même repère orthonormé.
- Montrer qu'il existe deux points de  $\mathcal{C}$  en lesquels la tangente a pour coefficient directeur  $-3$ .  
Donner alors une équation de chacune de ces tangentes.

**Exercice 7**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

- Justifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{-4x^2 + 16}{(x^2 + 4)^2}$ .
- Étudier les variations de  $f$  et donner son tableau de variation.
- (a) Calculer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.  
(b) Étudier les positions relatives de  $\mathcal{C}$  et de  $\mathcal{T}$ .
- Donner deux nombres  $m$  et  $M$  tels que pour tout réel  $x$  de  $[-4; 4]$ , on ait  $m \leq f(x) \leq M$ . Justifier votre réponse.